Journal of Training & Learning Researches

Investigating the Impact of Mason, Burton, and Stacey's Problem-Solving Method Based on Mathematical Modeling on the Learning and Comprehension of Proof and Reasoning Skills: An Experimental Study in Virtual Education of Ninth-Grade Students

DOI: 10.22070/tlr.2025.16019.1238

Arezoo Hosseini [*1]

1. *Assistant Professor Farhangian University. (Corresponding Author)*
   Email: a.hosseini@cfu.ac.ir

Received on: **29/02/2024**

Revised on: **05/01/2025**

Accepted on: **22/04/2025**

CC BY NC

Research Article

Vol. 22, No. 2, Serial 42

Autumn & Winter

2025-26

pp: 121-142

Abstract

Aim and introduction: The rapid shift to virtual education due to the COVID-19 pandemic has underscored the need for effective teaching methodologies in mathematics, particularly in developing proof and reasoning skills amongst students. This study aims to study the efficacy of the Mason, Burton, and Stacey problem-solving approach in enhancing ninth-grade students' understanding and capabilities in proof and reasoning within a virtual learning framework. Given that reasoning and proof are crucial components of mathematical understanding, the research seeks to determine whether these skills can contribute to solving mathematical problems through modeling real-life contexts. The study addresses the following research question: Can proficiency in proof and reasoning enhance students' abilities to apply mathematical modeling in real-life problem-solving scenarios?

Methodology: The research employs a quasi-experimental design with a static group comparison, integrating a pre-test and post-test evaluation to measure student performance before and after the intervention. The sample consists of 34 ninth-grade female students from one of the 19 educational districts in Tehran during the academic year 2020-2021. A multi-stage cluster sampling technique was adopted to select participants, resulting in two classes of 17 students each: one designated as the experimental group and the other as the control group. The experimental group engaged in learning the third chapter of the ninth-grade mathematics curriculum through the Mason, Burton, and Stacey problem-solving method, explicitly focusing on the skills of proof and reasoning. Conversely, the control group received traditional lecture-based instruction on the same topic.

Data were collected through a four-option questionnaire designed to assess students' understanding of mathematical modeling in relation to proof and reasoning skills. The questionnaire included questions aligned with various cognitive learning levels, ensuring that it adequately captured the depth of students' understanding. Validity was verified through expert evaluations by university professors in the field of mathematics education, while reliability was confirmed with Cronbach's alpha coefficients, showing values of 0.821 for the pre-test and 0.786 for the post-test, both falling within acceptable ranges for educational research.

Statistical analyses were conducted using SPSS software. The normality of the data permitted the use of independent two-sample t-tests and one-way analysis of covariance (ANCOVA) to compare the outcomes between experimental and control group participants.

Journal of Training & Learning Researches

Received on: **29/02/2024**

Revised on: **05/01/2025**

Accepted on: **22/04/2025**

CC BY NC

Research Article

Vol. 22, No. 2, Serial 42

Autumn & Winter

2025-26

pp: 121-142

Finding: The results of the statistical analysis revealed that there were significant differences in the performance of students between the experimental and control groups ($p = 0.0006$), indicating that the students taught through the Mason, Burton, and Stacey method achieved higher scores on assessment measures compared to their counterparts in the control group. Specifically, the findings of the t-test suggest that not only was the intervention effective in improving students' understanding of proof and reasoning, but it also fostered a more positive attitude towards learning these skills.

Further analysis using one-way ANCOVA provided additional evidence supporting the hypothesis that the Mason, Burton, and Stacey problem-solving method significantly enhances students' cognitive engagement with proof and reasoning. The experimental group demonstrated improved learning outcomes, evidenced by higher mean scores on both the pre-test and post-test assessments, confirming the methodology's effectiveness in promoting mathematical reasoning.

Discussion and Conclusions: The findings of this study have substantial implications for mathematics education, particularly in the context of virtual learning environments. The positive impact of the Mason, Burton, and Stacey method on students' proficiency in proof and reasoning suggests that this instructional approach can effectively bridge the gap between theoretical mathematical constructs and practical applications, enhancing students' abilities to tackle real-world problems through mathematical modeling.

The study emphasizes the necessity for educators to adapt innovative and engaging teaching methodologies that promote active participation and deeper cognitive engagement, especially in subjects like mathematics that typically require conceptual understanding rather than rote memorization. The COVID-19 pandemic has presented unique challenges in delivering mathematics education, making it imperative to explore and implement teaching strategies that can retain student engagement in a virtual context.

Moreover, the research highlights the critical role that proof and reasoning play in fostering students' logical thinking and problem-solving capabilities, which are essential skills not only in mathematics but across various disciplines. By integrating the Mason, Burton, and Stacey problem-solving method into the curriculum, educators can cultivate an environment where students not only learn mathematical concepts but also develop the skills needed to apply these concepts in practical situations.

In summary, this study concludes that the Mason, Burton, and Stacey problem-solving approach significantly improves the acquisition of proof and reasoning skills among ninth-grade students in virtual educational settings. As educational institutions continue to navigate the complexities of remote learning, there is an urgent need for further research and development of innovative teaching strategies that focus on student engagement and real-world applicability in mathematics education.

Keywords: Problem-solving, Proof and reasoning, Cognitive learning, Mathematics education, Mathematical modeling.

نشریه علمی
پژوهش‌های
آموزش و یادگیری

بررسی تأثیر روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی مبتنی‌بر مدل‌سازی ریاضی بر یادگیری و درک مهارت‌های اثبات و استدلال: یک مطالعهٔ تجربی در آموزش مجازی دانش‌آموزان پایهٔ نهم

DOI: 10.22070/tlr.2025.16019.1238

آرزو حسینی [*۱]

۱. **استادیار، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.** (نویسندهٔ مسئول)
Email: a.hosseini@cfu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰
تاریخ اصلاحات: ۱۴۰۳/۱۰/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۲

CC BY NC

مقاله پژوهشی

Journal of Training & Learning Researches
Vol. 22, No. 2, Serial 42
Autumn & Winter 2025-26

دوره ۲۲، شماره ۲، پیاپی ۴۲
پاییز و زمستان ۱۴۰۴
صص: ۱۴۲-۱۲۱

چکیده

هدف پژوهش حاضر بررسی تأثیر روش حل مسئلهٔ مبتنی‌بر مدل میسون، بورتن و استیسی بر یادگیری و درک دانش‌آموزان در درس اثبات و استدلال، بر بستر آموزش مجازی در دورهٔ کروناست. این تحقیق به این پرسش پاسخ می‌دهد که آیا مهارت در اثبات و استدلال می‌تواند به حل مسائل ریاضی با کمک مدل‌سازی در زندگی واقعی کمک کند یا خیر. روش این تحقیق از نوع کاربردی و شبه‌آزمایشی بوده که با طرح مقایسه‌ای گروه‌های ایستا همراه با اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون انجام شده است. جامعهٔ آماری تحقیق حاضر شامل ۳۴ دانش‌آموز دختر پایهٔ نهم متوسطهٔ اول سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ از یکی از مناطق نوزده‌گانهٔ شهر تهران است. برای انتخاب نمونه نیز از روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای چندمرحله‌ای استفاده شده است؛ به‌طوری که دو کلاس هفده‌نفره (گروه آزمایش و کنترل) از یک مدرسه واقع در منطقهٔ چهار انتخاب شده‌اند. گروه آزمایش درس فصل سوم کتاب ریاضی پایهٔ نهم را با تأکید بر دو مهارت استدلال و اثبات، به کمک روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی، به‌صورت مجازی آموزش دیدند؛ اما دانش‌آموزان گروه کنترل این درس را به شیوهٔ متداول سخنرانی، با آموزش مجازی فراگرفتند.

گردآوری داده‌ها برای سنجش درک دانش‌آموزان از روش حل مسئلهٔ مبتنی‌بر مدل میسون، بورتن و استیسی [۱] مبتنی‌بر مدل‌سازی ریاضی برای دو مهارت اثبات و استدلال، با استفاده از پرسش‌نامهٔ چهارگزینه‌ای انجام شد که سؤالات آن متناظر با سطوح مختلف یادگیری شناختی تنظیم گردید. برای تأیید روایی سؤالات پرسش‌نامه از نظرات اساتید آموزش ریاضی استفاده شد. پایایی آن نیز با محاسبهٔ ضریب آلفای کرونباخ به دست آمد که برای پیش‌آزمون برابر ۰/۸۲۱ و برای پس‌آزمون برابر ۰/۷۸۶ گزارش شد که هر دو مقدار در محدودهٔ موردتأیید قرار دارند. برای تجزیه‌وتحلیل آماری از نرم‌افزار spss شده و باتوجه‌به نرمال بودن داده‌ها و برقراری سایر شرایط، از آزمون T دونمونه‌ای مستقل و تحلیل کوواریانس یک‌راهه استفاده شده است. نتایج این پژوهش در بخش کمّی آزمون T نشان داد که در سطح معناداری ۰/۰۰۰۶ قرار دارد و چون از سطح معناداری ۰/۰۵ کمتر است، بین دانش‌آموزان گروه کنترل و آزمایش تفاوت وجود دارد. باتوجه‌به اینکه میانگین نمرهٔ آزمون گروه آزمایش بیشتر از گروه کنترل است و همین‌طور در تحلیل کوواریانس یک‌راهه، $P>0.05$، پس می‌توان فرضیات پژوهش را تأیید کرد که نشان‌دهندهٔ تقویت نگرش مثبت به یادگیری این دو مهارت در گروه آزمایش است. بنابراین دانش‌آموز با فراگیری این دو مهارت می‌تواند در حل مسائل ریاضی دنیای واقعی بهتر عمل کند و درک بهتری از فرایند مدل‌سازی در روش علمی داشته باشد.

واژگان کلیدی: حل مسئله، اثبات و استدلال، یادگیری شناختی، آموزش ریاضی، مدل‌سازی.

نشریه علمی پژوهش‌های آموزش و یادگیری / دوره ۲۲ / شماره ۲ / پیاپی ۴۲ / پاییز و زمستان ۱۴۰۴ / صص ۱۴۲-۱۲۱
Scientific Journal of Training & Learning Researches / Vol.22, No.2, Serial 42, Autumn & Winter 2025-26, pp. 121-142

مقدمه

ریاضی یکی از دروس جدانشدنی از برنامهٔ درسی است. هدف‌های متنوعی برای آموزش ریاضی و قرار دادن این درس به‌عنوان یکی از دروس مدرسه‌ای بیان شده است [۲]. اهداف کلی در حوزهٔ ریاضی به سه بخش اهداف دانشی، مهارتی و نگرشی تقسیم شده‌اند (تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضیات [۳]). از اهداف کلی دانشی می‌توان توانایی‌های ذهنی را در سه حیطهٔ تفکر عددی، هندسی و جبری معرفی کرد. کشف و استدلال، از اهداف مهارتی ریاضی است. از اهداف نگرشی بیان‌شده در برنامهٔ درسی ریاضی، می‌توان استفاده از ریاضیات در حل مشکلات و مسائل زندگی روزمره و پرورش توانایی‌های ذهنی را نام برد.

یکی از اهداف مهارتی، استدلال است. استدلال ابزاری است که افراد برای رسیدن به هدف ارائه می‌دهند. استدلال دو هدف اصلی دارد: توجیه و توضیح. هم توجیهات و هم توضیحات سعی در ارائهٔ دلایل دارند. توجیهات دلایلی هستند که برای باور به نتیجه‌گیریِ انجام‌شده ارائه می‌شوند و توضیحات دلایلی هستند که صحت نتیجه‌گیری را بیان می‌کنند. استدلال، مجموعه‌ای از جملات مرتبط به هم برای ایجاد یک گزارهٔ قطعی است. هدفِ یک استدلال همیشه به اثبات نتیجه‌گیری آن نیاز نخواهد داشت؛ زیرا بعضی نتیجه‌ها از قبل گرفته شده‌اند [٤]. این تعریف در کتاب *تفکر و استدلال*، این‌گونه آمده است: «استدلال مجموعه‌ای از جملات، بیانیه‌ها یا گزاره‌های متصل‌به‌هم است که قصد دارند دلیل خاصی را برای یک جمله، بیانیه یا گزاره ارائه دهند» [۵]. بنا بر نظر امرن[1] و همکاران، استدلال فعالیتی کلامی و اجتماعی است که با مطرح کردن دسته‌ای از گزاره‌ها برای توجیه یا رد نظر مقابل، به‌صورت منطقی بیان می‌شود [٦]. آندریسن[2]، بیکر و ساتر[3] (۲۰۰۳) بیان می‌کنند که استدلال اغلب باعث ایجاد فعالیت ساخت و تقویت دانش می‌شود. افراد در یادگیری استدلال، علاوه‌بر اینکه نحوهٔ دلیل‌آوری را می‌آموزند و تمرین می‌کنند، دانش، اطلاعات و آگاهی خود دربارهٔ آن موضوع را نیز ارتقا می‌دهند [۷].

در سند «تحول خط‌مشی برنامهٔ ملی در حوزهٔ یادگیری ریاضی [۳]»، اثبات و استدلال از نکات مهم در سازمان‌دهی مفاهیم محتوای کتاب‌های ریاضی مدرسه معرفی شده است. باید دقت داشت که هدف از اثبات و استدلال در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای، با هدف این مفهوم در فرایند آموزش رشتهٔ ریاضیات محض متفاوت است. در این پژوهش، اثبات و استدلال در حوزهٔ مدرسه و نقش آن در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای بررسی می‌گردد. این دو مهارت در زندگی روزمره از جایگاه خاصی برخوردارند و توانایی به‌کارگیری آن‌ها می‌تواند باعث ایجاد تفکر منطقی در افراد گردد. به این دلیل، بسیاری از پژوهشگران حوزهٔ آموزش ریاضی، استدلال و اثبات را از ابزارهای مهم و زمینه‌ای در آموزش و فراگیری ریاضی می‌دانند.

در کتاب *راهنمای معلم ریاضی پایهٔ نهم*، در فصل سوم، دربارهٔ استدلال و اثبات آمده است: «اثبات در کلاس مدرسه مانند اثبات در پژوهش محض نیست. در پژوهش ریاضی، اثبات به معنای متقاعد کردن و رسمیت بخشیدن به یک ایده و تفکر است؛ در صورتی که در کلاس درس مدرسه، اثبات و استدلال برای توضیح دادن، روشن شدن یک مفهوم یا یک حکم موردنیاز است؛ یعنی توضیحی است که چرا قضیه‌ای درست است. در کلاس مدرسه، اثبات به مفهوم منطق صوری نیست» [۸]. با این توصیف، هدف از تدریس اثبات و استدلال به دانش‌آموزان، بیان ایده‌هایی است که ارزش انتقال به دانش‌آموزان و فراگیران را دارند. بسیاری از پژوهشگران اثبات و استدلال‌های توضیحی را در سطح کلاس مدرسه مناسب می‌دانند، زیرا معتقدند سبب درک و فهم بهتر و کامل‌تری از ریاضی

1. Eemeren
2. Andriessen
3. Baker & Suthers

می‌شود [۹]، اما درک ریاضیات بدون استدلال و اثبات، جنبهٔ رویه‌ای پیدا می‌کند [۱۰]. گشتالتی‌ها هم نگاهی کل‌نگر به فراگیری دارند و معتقدند که ریاضی نباید به درسی رویه‌ای تبدیل گردد و این موضوع سبب از بین رفتن جوهرهٔ تفکر ریاضی می‌شود [۱۱]. تأکید بر یک رویه و توضیح کاملاً یک‌طرفهٔ معلم در اثبات و استدلال قضایا باعث می‌شود دانش‌آموز چرایی آن را درک نکند [۱۲]. بارزترین نماد اثبات و استدلال در هندسهٔ مدرسه‌ای از مقطع متوسطهٔ اول شروع می‌گردد که به شهود و ترسیم نیاز دارد و احساس نیاز به کلاس‌های حضوری بیشتر است [۱۱ و ۱۳].

از بهمن‌ماه ۱۳۹۸ تا زمستان ۱۴۰۰ که اپیدمی کرونا بر ایران و جهان حاکم شد، روش‌های آموزشی دستخوش تغییر شدند و نگاه جدیدی به روش‌های آموزش از راه دور ایجاد شد. حال این برنامهٔ درسی باید در بستر مجازی با همان حدت و قوت اجرا گردد. در ابتدا تلاش‌ها بر افزایش توانمندی زیرساخت‌های آموزش از راه دور و همچنین تولید محتواهای آموزشی متمرکز شد. درنتیجه، یکی از کارکردهای ملی‌ای که به‌شدت از بحران دورهٔ کرونا اثر پذیرفته، آموزش است [۱۴]؛ چراکه به‌دلیل رعایت فاصله‌گذاری‌های اجتماعی، از اوایل اسفندماه ۱۳۹۸ نظام آموزشی کشور در بخش آموزش‌وپرورش و آموزش عالی به‌نوعی تعطیل شد. نظام آموزش‌وپرورش دیگر نمی‌توانست با مدل قبلی به‌نحو مطلوبی به آموزش بپردازد و باید تغییرات ساختاری و دیجیتالی را در اولویت کاری خود قرار می‌داد و در سراسر کشور آن را فراگیر می‌کرد. بنابراین ضرورت توجه به آموزش مجازی و الکترونیکی بیش از پیش احساس می‌شد [۱۵]. حتی سازمان بهداشت جهانی هم طبق بیانیه‌ای اعلام کرده بود که آموزش از راه دور مانند رادیو، پادکست، تلویزیون و آموزش برخط از بهترین راه‌های ادامهٔ آموزش است [۱۶].

آموزش سنتی معتقد است کسب دانش نیاز به تمرکز و انضباط دارد و وظیفهٔ معلم ایجاد نظم برای یادگیری است، اما آموزش مجازی معتقد است کسب دانش محدود به محیط خاص نیست و وظیفهٔ معلم به‌عنوان راهنما و مشاور، طراحی و ایجاد محیط یادگیری است. رویکرد سنتی تکرار را برای یادگیری مهم می‌داند، ولی رویکرد مجازی معتقد است هر دانش‌آموز ویژگی‌ها و استعدادهای منحصربه‌فردی دارد و استعداد خودش را درمی‌یابد [۱۷].

شاید در نگاه اول تدریس در فضای مجازی کاری آسان به نظر برسد، اما این موضوع دربارهٔ همهٔ دروس صدق نمی‌کند و نحوهٔ عملکرد در تدریس هر درس متفاوت است. یکی از چالش‌برانگیزترین تدریس‌ها در کلاس‌های برخط، آموزش مجازی ریاضی است. باتوجه‌به مفهومی بودن درس ریاضی، نمی‌توان این انتظار را از دانشجو و دانش‌آموزان داشت که مفاهیم و فرایندهای ریاضی را فقط با نشستن و نگاه کردن به صفحات کتاب بیاموزند. در این صورت، اساتید و معلمان ریاضی باید روش‌های تدریس خود را با ابزارها و نرم‌افزارهای به‌روز منطبق کنند [۱۸]. در دورهٔ تدریس مجازی، به دنبال روش‌های تدریس ریاضی مجازی هستیم؛ روش‌هایی که برای دانش‌آموزان جالب باشند و انگیزه ایجاد کنند. ازآنجاکه اثبات و استدلال ریاضی جزو روش‌های قدرتمند برای توسعهٔ تفکر است، توانایی استدلال و تجزیه‌وتحلیل برای درک ریاضیات ضروری است. آموزش اثبات و استدلال را نمی‌توان به‌سادگی و صرفاً ازطریق «انجام اثبات‌های کوتاه» در هندسه، در بستر آموزش مجازی به‌طور کارآمد ارائه کرد. تحقیقات عظیم‌پور و واحدی در سال ۱۴۰۲، تأثیر استفاده از رسانه‌های آموزش الکترونیکی در آموزش درس هندسه برپایهٔ اثبات و استدلال را بر پیشرفت تحصیلی و خودکارآمدی تحصیلی دانش‌آموزان تأیید کرده است [۱۹]. پس استفاده از آموزش الکترونیکی تصاویر گرافیکی پویا در آموزش مجازی، راهکاری برای پیشبرد آموزش است [۱۹]. باید توجه کرد که اثبات کردن برای دانشجویان ریاضی دوره‌های کارشناسی نیز بسیار دشوار است. اثبات و استدلال باید قسمتی از تجربهٔ دانش‌آموزان از دوران ابتدایی تا متوسطهٔ دوم باشد.

استدلال درحقیقت باید یک عادت ذهنی باشد و مانند سایر عادت‌ها، باید با استفادهٔ مداوم در تمام زمینه‌ها ایجاد شود [۲۰].

افزون‌بر این، از عوامل مهم در فرایند آموزش ریاضی، نحوهٔ آموزش و تدریس آن است. در دورهٔ کرونا، روش تدریس اهمیت بیشتری دارد؛ چون علاوه‌بر محتوای آموزش، نحوهٔ فراگیری دانش‌آموزان نیز حائز اهمیت است. یکی از نظریه‌هایی که برای توسعه و رشد یادگیری و تفکر ذهنی وجود دارد، مشارکت و تعامل فردیِ ماهرانه‌تر با فراگیر است که توضیح اصول و روش حل مسئله و پرسیدن سؤال‌های هدایتی به این موضوع کمک می‌کند [۲۱].

باتوجه‌به اهمیت و کاربرد روزافزون دانش ریاضیات در فناوری، همچنین علوم دیگر و زندگی، مدل‌سازی در ریاضی ارزش خاصی دارد [۲۲]. مدل‌سازی قادر است به پاسخ چرایی آموزش ریاضی کمک کند، تصویری روشن از ریاضیات ارائه دهد و با استفاده از نرم‌افزارهای قوی در نمایش مدل‌های ریاضی، به آموزش ریاضی کمک کند تا درکی بهتر و علمی‌تر در زندگی روزمره ارائه دهد [۱۸]. ما در آموزش مدرسه ای به دنبال تربیت افرادی هستیم که بتوانند در برخورد با مشکلات، تفکر منطقی داشته باشند و موقعیت‌ها را تجزیه‌وتحلیل کند، برای حل مسئله و مشکلْ استدلال کنند و در حل مسائل زندگی واقعی، آن را به کار گیرند [۲۳ و ۲۴]. به‌این‌ترتیب، مهارت اثبات، استدلال و تفکر انتقادی باعث افزایش توانایی حل مسئلهٔ ریاضی دانش‌آموزان می‌شود [۲۵].

از نظر معنای لغوی، «استدلال»، «دلیل یا دلایلی است که یک ایده را پیشنهاد یا اثبات می‌کند یا روند توصیف این دلیل را تأیید یا رد می‌کند».[1] استدلال به معنای مفهومی، «دلیل آوردن» یا «دلیل جستن» است.[2] دلیل آوردن درحقیقت برای اثبات کردن یک موضوع است.[3] «اثبات» نیز به معنای «تصدیق»[4] است و نیز «معلوم کردن امر یا مطلبی به‌صورتی‌که دیگران بپذیرند».[5]

استدلال از جملاتی خبری به نام «فرضیات» و یک نتیجه‌گیری تشکیل شده است. فرضیه‌ها دلایلی را برای پشتیبانی از نتیجهٔ حاصل ارائه می‌دهند [۲۶]. بررسی و قضاوت دربارهٔ درستی یک استدلال برای قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام «اثبات» نشئت گرفته است [۳].

باتوجه‌به این اهداف در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، در این پژوهش به بررسی چگونگی تحقق آن‌ها در کلاس درس واقعی پرداخته شده است. به‌طور مشخص، میزان اهمیت دادن به استدلال[6] و اثبات[7] در کلاس درس مدرسه با روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی با مدل‌سازی بررسی می‌شود تا معلوم گردد که آیا مهارت در اثبات و استدلال می‌تواند به حل مسائل ریاضی با روش میسون، بورتن و استیسی با مدل‌سازی در زندگی واقعی کمک کند.

مبانی نظری تحقیق

ترس از ریاضیات به ایجاد موانعی هیجانی و ذهنی می‌انجامد که پیشرفت در ریاضیات را در آینده بسیار دشوار می‌سازد. براین‌اساس، دانش‌آموز نگرشی تقدیرگرایانه را برمی‌گزیند و انتظار دارد امروز در موقعیت ریاضی بد عمل کند. این شرایط به چرخه‌ای معیوب و نوعی پیشگویی کام‌بخش تبدیل می‌شود. یکی از اهداف مهم درس ریاضی، ایجاد توانایی‌های ذهنی و نظم فکری در دانش‌آموزان است. پس توسعهٔ قدرت درک و فهم استدلال، پرورش تفکر عقلی، به وجود آوردن روش استدلال و تفکر منطقی، آفرینش‌های

1 . Oxford Dictionary.
2 لغت‌نامهٔ دهخدا .

3. فرهنگ فارسی عمید
4. لغت‌نامهٔ دهخدا
5. فرهنگ فارسی عمید
6. Reasoning
7. Proof

فکری و خلاقیت‌پروری، از اهداف آموزش ریاضی در فراگیران به حساب می‌آید [۲۷].

اهمیت مدل‌سازی در حل مسائل زندگی واقعی

روش تدریس ریاضی همواره از دغدغه‌های معلمان و مدرسان ریاضی است. یکی از روش‌های تدریس یادگیرنده‌محور که می‌تواند به یادگیری بهتر و مفهومی‌تر ریاضی کمک کند، روش حل مسئله با مدل‌سازی است که در سال‌های اخیر در آموزش ریاضی اهمیت زیادی یافته است. مدل‌سازی می‌تواند به‌عنوان یکی از کاربردهای ریاضی برای توضیح و تعریف رویدادها و وقایع زندگی استفاده شود [۲۸].

به گفتهٔ باراک و همکاران[1] (۲۰۲۳) [۲۹]، مدل‌سازی ریاضی به فعالیتی اطلاق می‌شود که در آن، یک مسئله در جهان واقعی به یک مدل ریاضی تبدیل می‌شود. چگونگی آموزش مسائل مدل‌سازی، افزایش توانایی‌های مدل‌سازی دانش‌آموزان و وارد کردن آن در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای و درنهایت تغییر نگرش دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضی، از ملاحظات محققان در این حوزه بوده است. چرخهٔ فرایند مدل‌سازی با یک مسئله در دنیای واقعی آغاز می‌شود. سپس با صورت‌بندی مسئله در دنیای واقعی و تبدیل آن به یک مسئله ریاضی دنبال می‌گردد. در ادامه، چنین مسئله‌ای در دنیای ریاضیات حل می‌گردد و درنهایت جواب به‌دست‌آمده در دنیای ریاضیات به دنیای واقعی انتقال داده می‌شود تا با زمینهٔ واقعی مسئله تناسب پیدا کند (ورشافل[2]، ۲۰۰۷) [۳۰]. عبدالله‌پور و رفیع‌پور (۱۳۹٤) [۳۱] به پدیدارشناسی چرخهٔ مدل‌سازی دانش‌آموزان پایهٔ نهم در حل یک مسئلهٔ اصیل پرداختند. مهم‌ترین نتیجهٔ حاصل از این پژوهش این بود که تجربهٔ زیستهٔ دانش‌آموزان به حل مسئلهٔ مدل‌سازی کمک می‌کند و در پر کردن شکاف بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی نقش مهمی دارد.

پرهیزگار و همکاران (۱۳۹۹) [۳۲] به تأثیر آموزش مسائل مدل‌سازی ریاضی بر اشتیاق دانش‌آموزان پرداختند. هدف از این تحقیق، بررسی تأثیر آموزش مسائل مدل‌سازی ریاضی در دو شیوهٔ آموزشی متفاوت بر تجربه‌های شوق دانش‌آموزان در مسائل مختلف ریاضی (مدل‌سازی کلامی و درونی ریاضی) است. کریم‌آبادیان (۱٤۰۲) [۳۳] به تأثیر آموزش ریاضیات بر توانایی‌های حل مسئله و تفکر منطقی در دانش‌آموزان ابتدایی پرداخت. محقق در پژوهش خود عنوان داشت که ریاضیات به‌عنوان یکی از دروس مهم در سیستم آموزشی، نقش بسیار مهمی در توسعهٔ مهارت‌ها و توانایی‌های استدلال دانش‌آموزان ابتدایی ایفا می‌کند. آموزش ریاضیات نه‌تنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مفاهیم ریاضی را یاد بگیرند، بلکه توانایی‌های حل مسئله و تفکر منطقی آنان را تقویت می‌کند. این توانایی‌ها و مهارت‌ها می‌توانند به‌عنوان پایه‌ای اساسی برای تقویت دانش‌آموزان در حوزه‌های دیگری ازجمله علوم، مهندسی و حتی در زندگی روزمره عمل کنند. یکی از مسائل مهمی که درزمینهٔ آموزش ریاضیات مطرح می‌شود، تأثیر آموزش ریاضیات بر توانایی حل مسئله و تفکر منطقی در دانش‌آموزان است.

برای ایجاد این تفکر، دیدن مدل‌های ریاضی در فضای مجازی به‌راحتی امکان‌پذیر است. این مدل‌های ریاضی در کشورهایی که از آموزش مجازی استفاده می کنند، با کمک نرم‌افزار جئوجبرا، مسیر آموزش را ساده کرده‌اند (مانند تحقیقاتی که حسینی شکرابی و بیگ‌زاده در سال ۱٤۰۲ انجام داده‌اند) [۳٤]. بنا بر گفتهٔ کیگان[3]، با با تحلیل داده‌های جهانی دربارهٔ آموزش ریاضی از راه دور، دو روش به دست آمده است: ۱. تعلیم از راه دور فردی؛ ۲. تعلیم از راه دور گروهی [۳۵].

در نظام‌های فردگرا، به‌دلیل جدا بودن معلم از فراگیر، آموزش از راه دور نوعی طراحی برنامه‌ریزی‌شده در نظر گرفته شده است که عموماً در مکانی متفاوت با محل تدریس انجام می‌شود و درنتیجه مستلزم

1. English & Sriraman
2. Verschaffel
3. Keegen

روش‌هایی خاص برای طراحی دورهٔ درسی با استفاده از روش‌های مکاتبه‌ای یا رسانه‌های سمعی و بصری (مانند رادیو و تلویزیون و ابزار وابسته، مانند نوارهای صوتی یا ویدئویی و ارسال بسته‌های یادگیری و دریافت نتایج ازطریق پست) است [۳۵]. منظور از آموزش الکترونیکی ریاضیات، آموزش مبتنی‌بر اینترنت و ازطریق رایانه است که با آموزش مجازی معادل و یکسان در نظر گرفته می شود. آموزش الکترونیکی زیرمجموعهٔ آموزش از راه دور است. درحقیقت، آموزش الکترونیکی باعث تعامل بیشتر مدرسان، یادگیران و دوره‌های فناوری مشارکتی در فراگیری ریاضی می‌گردد [۳۶]. دانش‌آموزان نیز هنگام استفاده از اینترنت و دیدن موقعیت‌های حقیقی در کارهای ریاضی، می‌توانند بسیار باانگیزه شوند. مثال‌هایی از مشاغل غیرمرتبط با ریاضیات که از ریاضی استفاده می‌کنند، می‌تواند نگاه و نظر دانش‌آموزان را به ریاضی بهتر کند [۳۷].

در آموزش ریاضی، نخستین ایرادی که به برخی از این مسئله‌ها وارد است، غیرحقیقی بودن و تصنعی بودن موقعیت مسئله است که آموزش مجازی و دنیای مجازی به این مشکلات دامن زده و سبب شده است برای بعضی فراگیران غیرقابل‌باور باشد [۳۸]. همین موضوع سبب دور شدن بیشتر ریاضی از زندگی حقیقی می‌شود. برای مثال، مسئلهٔ زیر که در کتاب سال هفتم متوسطه (۱۳۹۴) [۳۸] آمده، از این نوع است:

«تعداد ۲۰ دوچرخه و سه‌چرخه در یک پارکینگ وجود دارد. تعداد کل چرخ آن‌ها ۴۵ عدد است. چند دوچرخه و چند سه‌چرخه در پارکینگ وجود دارد؟»

نخستین سؤال دانش‌آموزان بعد از مشاهدهٔ این مسئله این است: چرا ابتدا به‌جای شمارش تعداد دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها، چرخ‌ها را می‌شمارد؟

زمانی که دانش‌آموز خود را در موقعیت طراح سؤال قرار می‌دهد، می‌بیند که اگر خودش در پارکینگ با موقعیت حقیقیِ چنین مسئله‌ای مواجه گردد و بخواهد تعداد دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها را بداند، چرخ‌های آن‌ها را نمی‌شمارد، بلکه دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها را می‌شمارد که کاری راحت‌تر به نظر می‌رسد. این از نمونه‌سؤالاتی است که دانش‌آموز ارتباط صحیحی بین ریاضیات و دنیای حقیقی خود نمی‌بیند و تصور می‌کند ریاضیات تنها در موقعیت‌های غیرواقعی و انتزاعی قابل‌طرح است. به این دلیل، فراگیران ریاضی را درسی نامفهوم و خشک می‌دانند و از آن فرار می‌کنند [۳۶].

گذری بر مراحل فرایند اثبات و استدلال با روش میسون، بورتن و استیسی

در برخورد با یک مسئله، بنا بر نظر میسون، بورتن و استیسی، سه مرحله طی می‌شود که شامل تشخیص فرضیات، ورودی‌های مسئله و حمله و نقد و بررسی است. پیشرفتی که در حل مسئله حاصل می‌شود، متناسب با گذر از مرحله‌ای به مرحلهٔ دیگر است. یادگیریِ شناسایی این مراحل در تفکر، باعث شناخت فعالیت مناسب برای حل مسئله می‌شود. شاید به نظر بیاید که از سه مرحلهٔ بیان‌شده، مرحلهٔ حمله به مسئله مهم‌تر باشد؛ زیرا در این مرحله، بیشتر محاسبات و فعالیت‌های ریاضی انجام می‌شود، اما مرحلهٔ اول (یعنی توجه به ورودی‌های مسئله) از تمام مراحل مهم‌تر است. بیشتر افراد به‌دلیل بی‌توجهی به داده‌ها و خواسته‌های مسئله، در حل مسائل موفق نمی‌شوند. مرحلهٔ حمله فقط در صورتی می‌تواند ایجاد شود که شناخت مناسبی از مسئله ایجاد گردد.

مرحلهٔ ورود:[1] در مرحلهٔ ورود به مسئله، دو مورد مهم است که اول جذب اطلاعات داده‌شده (فرضیات) و دوم کشف موارد خواسته‌شدهٔ مسئله (حکم) است. طرح سه سؤال مهم است: ۱. از فرضیات مسئله چه می‌دانم؟ ۲. چه حکمی می‌خواهم؟ ۳. چه چیزی را می‌توانم برای حل مسئله (ابزار یا روش‌های حل مسئله، مانند مدل‌سازی ریاضی) معرفی کنم؟

مرحلهٔ حمله:[2] تفکر هنگامی وارد مرحلهٔ حمله می‌شود که احساس کنید مسئله از آنِ شما شده است.

1. Entry
2. Attack

در این مرحله، از فعالیت های ریاضی متنوعی استفاده می‌کنیم و با عبارت‌هایی مانند «آها!» از زبان دانش آموزان مواجه می‌شویم. در این مرحله، می‌توان چندین رویکرد مختلف را در نظر داشت و چندین روش را امتحان کرد.

مرحلهٔ بررسی:[1] هنگامی که به مرحلهٔ آخر حل سؤال می رسید یا هنگامی که می‌خواهید تسلیم سؤال شوید، بررسی کارهای انجام‌شده بسیار مهم است و به‌منظور بهبود و گسترش مهارت های تفکر انجام می‌شود. باید به گذشته برگردید و در رویدادهای کلیدی تأمل کنید. بهترین راه برای این مرحله، نوشتن نقد و بررسی مطالب است. با این کار، می‌توان به ایده هایی برای بهبود حل مسئله و گسترش آن‌ها برای حل مشکلات دیگر رسید.

در روش میسون، بورتن و استیسی، تفکر ریاضی در سه مرحلهٔ «ورود»، «حمله» و «بازبینی»، تقویت می‌شود. این فرایند با درگیر شدن، فکر کردن، ادامه دادن، بینش، بدبینی و تأمل همراه است. فاز «ورود»، زیربنای «حمله»، و «بررسی» آموزشی‌ترین مرحله است که کمترین توجه به آن می‌شود؛ در صورتی که تأمل همراه با تمرین تفکر است که ریاضی را بهبود می‌بخشد [۱].

بنابراین آشنایی با مدل‌سازی و انواع آن، مهارت استدلال و اثبات دانش‌آموزان را با روش میسون، بورتن و استیسی[2] (۲۰۱۰) ارتقا می‌دهد و این خود راه را برای رسیدن به سطوح پیچیده‌تر یادگیری شناختی هموار می سازد. در طبقه‌بندی بلوم برای اهداف شناختی یادگیری مراحلی در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب عبارت‌اند از: دانش، فهم، کاربرد، تحلیل، ترکیب و ارزشیابی. ازآنجاکه در بحث اثبات و استدلال می‌خواهیم دانش‌آموزان از مدل‌سازی ریاضی کمک بگیرند و آن را در زندگی روزمره به کار ببرند، از شش حیطهٔ بلوم، سطح کاربرد و سطوح پس از آن بررسی می‌شود.

این پژوهش در مرحلهٔ اول دربارهٔ چگونگی استدلال و اثبات با روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی در دانش‌آموزان پایهٔ نهم در کلاس درس مجازی و رویکرد آن‌ها به این دو مهارت است و در مرحلهٔ دوم دربارهٔ تأثیر این دو مهارت بر حل مسائل ریاضی زندگی واقعی آن‌ها با کمک مدل‌سازی است.

توجه داشته باشید که حل مسئله در مسائل زندگی روزمره و در ریاضیات یا در هر کار فکری دیگری می‌تواند صورت پذیرد (مثلاً به کمک روش‌های استقرایی، مدل‌سازی و... . همهٔ این‌ها روش‌های حل مسئله هستند). یکی از نگاه‌ها و روش‌های برخورد با مسئله، روش میسون، بورتن و استیسی است که کمک می‌کند مسئله حل گردد. در مراحل انجام روش میسون، بورتن و استیسی برای درک مسئله و حل آن از مدل‌های ریاضی کمک گرفته می‌شود.

در پژوهش حاضر، دانش‌آموزان پس از بازپس دادن و تشریح اطلاعاتی که در حیطهٔ اثبات و استدلال و انواع مدل‌سازی علمی در اختیارشان قرار گرفته است، به‌راحتی سطوح اولیهٔ دانش و فهم را طی می‌کنند. ازآنجاکه در دو سطح اول بلوم از مدل‌سازی استفاده نمی‌شود، بررسی این سطوح از یادگیری موضوع بحث تحقیق حاضر نیست؛ ولی یادگیری در سطح کاربرد و سطوح پس از آن را بدین صورت در تحقیق حاضر مد نظر قرار می‌دهیم:

۱. در سطح کاربرد، دانش‌آموز پایهٔ نهم باید بتواند مفاهیم انتزاعی در زمینه‌های عینی را ببیند؛ یعنی پس از آموزش اثبات و استدلال با کمک مدل‌سازی، باید بتواند برای درک آن‌ها، مدل ساده‌ای (هرچند نادرست) ارائه دهد.
۲. در سطح تحلیل، فراگیر اطلاعات را به اجزای آن تقسیم می‌کند، به‌نحوی‌که روابط بین آن اجزا روشن شود؛ یعنی مثلاً دانش‌آموز باید حداقل بتواند فرایندهای پیشبرد حل مسئله با روش میسون، بورتن و استیسی [۱] را با کمک مدل‌سازی ریاضی توصیف کند.
۳. در سطح ترکیب، دانش‌آموز باید دانش قبلی خود را با شکل‌های جدید آن ترکیب کند؛ برای نمونه، پس از گذراندن دورهٔ آموزشی دو مهارت اثبات و استدلال،

1. Review
2. Mason, Burton & Stacey

فرایند عرضهٔ مدل‌های ریاضی را در زندگی روزمره به کار برد.

٤. در سطح ارزشیابی از یادگیری شناختی، دانش‌آموز باید تشخیص دهد در حال حاضر چه موضوعاتی در ریاضیات شایستگی مدل‌سازی علمی دارند.

بنا بر فرضیات بالا، سؤالی کلی مطرح است: آیا می‌توان توانایی‌های اثباتی و استدلالی و مهارت‌های حل مسائل دنیای واقعی را ازطریق روش تدریس ریاضی افزایش داد؟

میزان یادگیری شناختی دانش‌آموزان در سطوح کاربرد، تحلیل، ترکیب و ارزشیابی، پس از اتمام دورهٔ درسی دو مهارت اثبات و استدلال با روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی، با کمک مدل‌سازی در قالب پس‌آزمون بررسی می‌شود.

سؤال پژوهش

آیا می‌توان در دوره‌های آموزش مجازی، توانایی‌های اثباتی و استدلالی و مهارت‌های حل مسائل دنیای واقعی را ازطریق روش تدریس میسون، بورتن و استیسی با کمک مدل‌سازی ریاضی، در فراگیرن افزایش داد و آیا فراگیر می‌تواند در بحث‌وجدل روزانه از آن کمک بگیرد؟

فرضیهٔ تحقیق

فرضیه‌ای که در این تحقیق آزموده می‌شود، از این قرار است:

دانش‌آموزانی که به‌طور مجازی درس مهارت‌های استدلال و اثبات را با استفاده از روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی (شامل سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی) با کمک مدل‌سازی ریاضی در مواجهه با مسائل حقیقی روزمرهٔ مطرح‌شده در کلاس مجازی با موفقیت گذرانده‌اند، نسبت به دانش‌آموزان مشابهی که این درس را به‌صورت معمول تدریس سنتی سخنرانی گذرانده‌اند، درک بهتری از فرایند حل مسئله با کمک مدل‌سازی ریاضی با روش علمی دارند و توان استفادهٔ آن‌ها در زندگی روزمره ارتقا می‌یابد.

محدودیت‌های پژوهش

باتوجه‌به شیوع ویروس کووید ۱۹ و تعطیلی مدرسه ها، ارتباط با دانش‌آموزان به‌صورت غیرحضوری و در بستر «آموزش مجازی شبکهٔ شاد و ادوبی‌کانکت» انجام شد. این شرایط برای پژوهشگر و دانش‌آموزان جدید بود و این واقعیت نوع تعامل را کمی تغییر داده بود؛ زیرا برای عادت کردن به فضای آموزش مجازی، زمان لازم است. البته سال پیش، دانش‌آموزان تا حدودی با این فضا آشنا شده بودند؛ ولی باید توجه کرد که در این تحقیق، تمرکز بر افزایش مهارت اثبات و استدلال در حل مسائل با روش میسون، بورتن و استیسی با کمک مدل‌سازی ریاضی در بستر آموزش مجازی است. بنابراین به روش‌های تدریس مجازی پرداخته نمی‌شود. تأکید می‌شود که استفاده از بستر مجازی برای هر دو گروه آزمایش و کنترل یکسان است و از نرم‌افزارهای یکسانی برای هر دو گروه استفاده شده است.

روش تحقیق

این پژوهش از نوع کاربردی و شبه‌آزمایشی براساس طرح مقایسهٔ گروه‌های ایستا با اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون است. جامعهٔ آماری تحقیق حاضر ۳٤ نفر از دانش‌آموزان دختر پایهٔ نهم متوسطه هستند که از مناطق نوزده‌گانهٔ سازمان آموزش‌وپرورش شهر تهران در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱٤۰۰، با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای یک منطقه، به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند. سپس از بین هفت مدرسهٔ متوسطهٔ اول دخترانهٔ منطقهٔ چهار، یک دبیرستان (متوسطهٔ اول) به‌صورت خوشه‌ای انتخاب گردیده است. درنهایت، تقریباً به‌نسبت تعداد دانش‌آموزان آن منطقه و مدرسه، دو کلاس از بین نُه کلاس نهم این مدرسه به‌عنوان آزمودنی‌های تحقیق پایهٔ نهم متوسطه، برحسب نمونه‌گیری تصادفی انتخاب

شده‌اند. این دو کلاس از نظر میانگین معدل به هم نزدیک بوده‌اند.

در این پژوهش، در ابتدا از پیشینهٔ اطلاعات دانش‌آموزان هر دو کلاس یک پیش‌آزمون گرفته شد و عملکرد فراگیران در مواجهه با مسائل اثباتی هندسی و همچنین نحوهٔ اثبات و استدلال آن‌ها در سؤالات غیرهندسی بررسی گردید. در این مرحله، سطح درک و مهارت دانش‌آموزانِ دو گروه کنترل و آزمایش در استدلال و اثبات ارزیابی گردید. سپس با استفاده از روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی (شامل سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی)، سؤالات بازنگری شدند. درنهایت، تأثیر مهارت استدلال و مدل‌سازی ریاضی دانش‌آموزان گروه آزمایش بر فرایند حل مسائل ریاضی دنیای حقیقی بررسی شد و با گروه کنترل که این درس را به‌صورت سخنرانی دریافت می‌کردند، مقایسه گردید. هر دو کلاس در بستر مجازی برگزار شد. اجرای روش سخنرانی در فضای مجازی شاد بدین معنی است که تعاریف به‌صورت صدای ضبط‌شده به فضای مجازی شاد فرستاده می‌شوند و فیلم‌های آموزشی تهیه‌شده در این برنامه قرار می‌گیرند و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود سؤالات کاردرکلاس را حل کنند و فعالیت‌های موجود در کتاب را انجام دهند. سپس با قرار دادن صدای ضبط‌شده در محیط شاد، بعضی از فعالیت‌ها توضیح داده می‌شوند. در فضای ادوبی‌کانکت نیز سؤالات کتاب به‌صورت برخط حل می‌شوند. به‌دلیل روش تدریس متفاوت برای گروه آزمایش، زمان تدریس برخط برای این گروه بیشتر است.

در این پژوهش، استدلال و اثبات در سؤال‌های غیرهندسی و هندسی هر دو گروه کنترل و آزمایش در پیش‌آزمون با ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۲۱ ارزیابی شد و سپس نحوهٔ پاسخ‌گویی فراگیران به سؤالات دنیای واقعی از دو جهت بررسی گردید: ابتدا در گروه کنترل باتوجه‌به آموزش مدرسه‌ای استدلال و اثبات (روش سخنرانی) و دوم، در گروه آزمایش باتوجه‌به در نظر گرفتن روش حل مسئله (شامل سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی).

این سه مرحله، چهارچوب حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی را تشکیل می‌دهد که در آن، مرحلهٔ «ورود»، مهم‌ترین مرحله برای حل مسئله است که باید به‌وضوح و به‌طور دقیق، فرض‌ها و حکم (حکم‌های) مسئله شناخته و بیان شوند.

در کتاب ریاضیات پایهٔ نهم دورهٔ اول متوسطه، نخستین بار در فصل سوم، فراگیران با کلمات «فرض» و «حکم» و تعاریف آن‌ها آشنا می‌شوند و فقط در سؤالات این فصل است که از فراگیران خواسته می‌شود حکم و فرض را بیان کنند؛ درحالی‌که برای هر مسئله‌ای، فرضیات و احکامی وجود دارد و این موضوع مختص حل سؤالات هندسی نیست. اگر حل‌کنندهٔ سؤال متوجه داده‌ها و خواسته‌های سؤال نباشد، ممکن است راه اشتباهی را برای رسیدن به پاسخ طی کند یا شناخت ناقص و غلط سبب شود فراگیر در میانهٔ راه فکر کند که اثبات به پایان رسیده و به پاسخ رسیده است یا از حکم مسئله به‌عنوان فرض استفاده کند.

مرحلهٔ «ورود» به مسئله و شناخت فرضیات و خواسته‌های سؤال، مرحلهٔ درخور توجهی است که عموماً زمان درنظرگرفته‌شده برای این قسمت، در حد بیان تعاریف است؛ درحالی‌که در هر مسئله‌ای، چه غیرهندسی و چه هندسی، باید از فراگیران خواسته شود که تشخیص دهند مسئله چه فرضیاتی را بیان کرده است و چه احکامی را از آن‌ها می‌خواهد. به‌علاوه، شناخت ابزار مناسب هم در این مرحله صورت می‌گیرد. باید بررسی شود که باتوجه‌به فرضیات و احکام سؤال، از چه ابزارها و وسایل کمک‌آموزشی‌ای می‌توان استفاده کرد. تمام این مطالب گفته‌شده با راهنمایی درست معلم امکان‌پذیر است. معلم باید با این سؤالات، از فراگیران بخواهد که با فکر کردن و جست‌وجو در ذهن خود، به پاسخ‌های درست دست پیدا کنند.

مرحلهٔ دوم، مرحلهٔ «حمله» و دست‌وپنجه نرم کردن با مسئله است. باید بتوانیم مسئله‌ای را که به‌صورت سؤال ریاضی درآمده است، حل کنیم. دانش ریاضی مهم است

و با کمک تفکر و استدلال، دست به اثبات می‌زنیم. در اینجا باید به فراگیران یادآوری شود که فرضیات را در نظر داشته باشند و در مراحل متفاوت اثبات، دوباره به آن‌ها رجوع کنند.

بحث‌وجدلی که در کلاس درس صورت می‌گیرد و درخواست یاددهنده از فراگیران برای بیان دلایل خود و اثبات و استدلال دربارهٔ درستی روش حل، سبب می‌شود فراگیرن به تفکر بپردازند و از یک مسئله به‌راحتی عبور نکنند.

در سال نهم، استدلال و اثبات نخست با استدلال شهودی آغاز می‌شود و با مثال‌هایی، اهمیت و لزوم استدلال رسمی به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود. سپس در ادامه، اثبات‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها بیان می‌شود.

بعضی مسائل دارای چند راه‌حل و روش اثبات هستند. در این پژوهش، تأثیر این روش‌ها بر رشد تفکری فراگیران بررسی شده است تا مشخص شود آیا تأکید بر استدلال‌های متفاوت سبب می‌شود دانش‌آموزان برای حل سؤالات اثبات‌کردنی، تمرکز و تفکر خود را بیشتر به کار گیرند و کمتر قضیه‌ها را حفظ کنند یا خیر. برای ما مهم است که فراگیران درک کنند که برای حل یک سؤال فقط یک راه‌حل درست وجود ندارد و ممکن است راه‌حل‌های درست دیگری نیز موجود باشد. از طرف دیگر، بخش‌های مهم حل مسئله‌های ریاضی در دنیای حقیقی(در سطح به‌کارگیری بلوم) به این قرارند: نخست، درک، فهمیدن و تشخیص داده‌ها و خواسته‌های مسئله (در سطح تحلیل بلوم)؛ دوم، تبدیل این داده‌ها و فرضیات به زبان ریاضی؛ سوم، حل آن مسائل؛ چهارم، بیان جواب به زبان دنیای واقعی.

مرحلهٔ «بررسی»، فراگیران را مجبور به مرور مراحل طی‌شده می‌کند تا به نظمی در ذهن و تفکر خود برسند و اشتباهات و نقاط ضعف خود را بررسی کنند و برای حل آن‌ها کوششی دوباره انجام دهند. عموماً به این مرحله توجه نمی‌شود، اما قسمت مهم آموزش در این بخش است که فراگیر قادر باشد دانشی را که به دست آورده است، دسته‌بندی و منظم کند. مرحلهٔ بررسی به تفسیر و تعبیر پاسخ‌های به‌دست‌آمده از حل سؤال در دنیای ریاضی (در سطح ترکیب بلوم) و دنیای حقیقی کمک می‌کند. در اینجا توضیح و استدلال نیز یاری‌گر است. این تفسیرها و توضیحات به استدلال نیاز دارند (در سطح ارزشیابی بلوم).

پس از اتمام این دورهٔ درسی، برای سنجش درک دانش‌آموز هر دو گروه از فرایند مدل‌سازی در ریاضی و همچنین سنجش میزان یادگیری شناختی آن‌ها در این زمینه، از یک پرسش‌نامه با هفت سؤال چهارگزینه‌ای استفاده شد. در این پرسش‌نامه، نمرهٔ ۱ یا ۰ برای درستی یا نادرستی پاسخ‌ها منظور شد. پرسش‌ها به‌صورت کاملاً استنباطی تنظیم شدند و ارتباط مستقیمی با دانش ــ محتوای دو مهارت اثبات و استدلال و دانش ـ محتوای ریاضی دانش‌آموزان داشتند. در طراحی سؤالات، از دیدگاه‌های اساتید آموزش ریاضی کمک گرفته شد و پس از برخی تغییرات در پرسش‌ها، روایی آزمون تأیید گردید. به‌دلیل کم بودن تعداد سؤالات و حجمِ نمونهٔ آماری، چند پیش‌آزمون از تعدادی از دانش‌آموزان نمونهٔ آماری گرفته شد و هم‌بستگیِ سؤالات و ضریب آلفای کرونباخ آن‌ها بررسی و محاسبه گردید. درنهایت، برخی از سؤالات برای افزایش پایایی پرسش نامه حذف یا تصحیح شدند و ضریب پایایی در پس آزمون ازطریق نرم‌افزار SPSS برابر با مقدار ۰/۷۸۶ حاصل شد. این عدد نشان‌دهندهٔ پایایی پرسش‌های آزمون است. پرسش‌نامهٔ نهایی دانش‌آموزان در پایان دورهٔ اول متوسطه (پایهٔ نهم) به ترتیب، موارد زیر را می آزمود:

۱. بررسی نقش صورت‌بندی مسئله در فهمیدن آن توسط دانش‌آموزان به‌منظور ارائهٔ یک مدل ساده برای داده‌های فرضی ارائه‌شده از مسئله؛
۲. امکان وجود چند مدل و راه‌حل برای یک مسئله برای مواجههٔ دانش‌آموزان پایهٔ نهم با مسائل دنیای واقعی؛
۳. نحوهٔ استدلال دانش‌آموزان پایان دورهٔ اول متوسطه (پایهٔ نهم) در برخورد با مسائل ریاضی و چیستی مدل‌سازی در روش علمی؛

٤. تأثیر افزایش دقت در مدل‌سازی ریاضی بر افزایش توانایی‌های اثباتی و استدلالی دانش‌آموزان در پایان پایهٔ نهم؛
٥. تشخیص و طراحی یک مسئلهٔ صحیح و به‌روز در مقاطع تحصیلی بالاتر.

این موارد دانش‌آموزان را از منظر یادگیری شناختی، به ترتیب در سطح کاربردی (۱ و ۲)، در سطح تحلیل (۳)، در سطح ترکیب (٤) و در سطح ارزشیابی (٥) ارزیابی می‌کند.

تحلیل محتوای آزمون از منظر یادگیری شناختی

می‌توان سطوح یادگیری شناختی را ازطریق موارد بالا در پرسش‌ها ردیابی کرد. مورد اول (سطح کاربردی) در سؤال ۱ و ۲ (ضمیمه) آزموده شد، به‌این‌ترتیب که متغیرهای متفاوت در شرایط خاصی ارائه شدند. از آن‌ها خواسته شد دقیق‌ترین مدل ریاضی را برای رابطهٔ بین متغیرها ارائه دهند. باوجوداینکه هیچ راه خاصی برای آن گفته نشده بود، باید با توانایی تشخیص فرضیات و احکام، دردسترس‌ترین و بهترین مدل قابل‌ارائه را انتخاب می‌کردند و به کمک سه مرحلهٔ حل مسئله (ورود، حمله و بررسی) که آموخته بودند، آن‌ها را حل کنند.

مورد دوم (سطح تحلیل) در سؤال ۳ بررسی شد، به این صورت که پس از ذکر برخی مدل‌های مهم ریاضی در اثبات و استدلال، از دانش‌آموزان خواسته شد اصلی‌ترین نقش مشترکِ تمام این مدل‌سازی‌ها را انتخاب کنند. در این سطح، دانش‌آموزان باید نقطهٔ مشترک آنچه را در کل مدل‌سازی در اثبات و استدلال آموخته بودند، استخراج می‌کردند که همان «ساده‌سازی و مرتب‌سازی مسئله» است. از چهار گزینهٔ پیش‌رو، در دو گزینه، دو مدل احتمالی برای تعیین حل مسئله (بنا بر نظریهٔ میسون، بورتن و استیسی) مطرح شد و در دو گزینهٔ دیگر، نادرستی جدول و غلط بودن آن به‌علت کم بودن اطلاعات نوشته شد.

جدول ۱. نحوهٔ استدلال در مسئلهٔ ریاضی دنیای واقعی (برشته کردن نان)

۵. سؤال دربارهٔ پخت نان در یک کورهٔ نانوایی است. می‌خواهیم سه برش نان در کوره برشته شود. این کوره قادر است هم‌زمان دو برش نان را در خود جای دهد، اما فقط یک طرف آن هم‌زمان برشته می‌شود. ۳۰ ثانیه طول می‌کشد تا یک طرف هر تکه نان برشته شود. ۵ ثانیه برای قرار دادن یا بیرون آوردن یک تکه و ۳ ثانیه برای برگرداندن یک تکه لازم است. کوتاه‌ترین زمانی که می‌توان سه برش را برشته کرد، چقدر است؟ (ریاضی، فکر کردن، ص ٣٤ [۳۹])	
دانش‌آموز (۱)	برای این سؤال، بدون توجه به فرضیات و موقعیت سؤال، فقط به جمع اعداد پرداخت و حالت‌های متفاوت را در نظر نگرفت.
دانش‌آموز (۲)	دربارهٔ نان سوم، فقط یک طرفِ پخت را در نظر گرفت و برای گذاشتن یا برداشتن، فقط ۵ ثانیه را برای هر نان محاسبه کرد و آن‌ها را با هم جمع کرد.
دانش‌آموز (۳)	به فرض‌های مسئله توجه نکرد و حتی ۵ ثانیه و ۳ ثانیه را که برای برداشتن یا گذاشتن و برگرداندن نان داده شده بود، جابه‌جا در نظر گرفت. به قرارگیری هم‌زمان دو نان در کوره هم توجه نکرد. در محاسبات توجهی به موقعیت واقعی نداشت و فقط عملیات را پشت‌سرهم انجام داد. در آخر نیز زمان پخت دو نان را بر یک نان تقسیم کرد.
دانش‌آموز (٤)	برای دو تکه نان، یک زمان را محاسبه کرد و برای نان سوم زمان را جدا حساب کرد، با این تفاوت نسبت به نان اول که دو تا نان در کوره نیست و فقط یک بار باید برگردانده شود و درنتیجه این دو را با هم جمع کرد.
دانش‌آموز (٥)	پاسخ مانند دانش‌آموز (۱)
⋮	⋮

در پاسخ به این سؤالات، دانش‌آموزان با در نظر گرفتن روش استدلال منطقی، این پدیده را با چند مدل توصیف کردند و باید بین دو گزینهٔ اول، صحیح‌تر را که «ب» بود، انتخاب می‌کردند. به همین ترتیب، مورد سوم نیز در سؤال ٤ و ٥ آزموده شد. در سؤال ٤، دو گزینهٔ اول روش صحیح استدلال و الگوبندی را ارائه می‌دادند، ولی باید به حکم ــ که کمترین مقدار کاغذکادو بود ــ توجه می‌کردند و گزینهٔ صحیح‌تر را که «الف» بود، انتخاب می‌کردند. در سؤال بعد، از مسائل روزمره (مانند آشپزی) استفاده شد تا در صورتی که فراگیران به سطح تحلیل از یادگیری شناختی رسیده باشند، بتوانند «جمع‌آوری داده‌های علمی، مدل‌سازی و روش استدلال برای حل مسائل مشابه گزینهٔ "د"» را از بین پاسخ‌ها انتخاب کنند (نمونهٔ مصاحبه، نحوهٔ استدلال تعدادی از دانش‌آموزان دربارهٔ سؤال ٥ برای سطح تحلیل).

به‌منظور سنجش مورد چهارم (سطح ترکیب) در سؤال ششم، از اتفاقات فیزیک بهره برده‌ایم که مشغلهٔ اصلی و مشترک علم‌پیشگان تجربی است. فراگیران باید به تفاوت سرعت نور و صدا توجه کنند و فاصلهٔ خود را باتوجه‌به شنیدن صدای رعدوبرق و محل رؤیت رعد، تخمین بزنند. اگر دانش‌آموز به سطح ترکیب از یادگیری شناختی رسیده باشد، می‌تواند تشخیص دهد که هر سه گزینهٔ پاسخ، یعنی «جمع‌آوری داده‌های رصدی بیشتر، انطباق داده‌های رصدی موجود با توابع ریاضی دقیق‌تر، آزمون‌وخطای بیشتر با تغییر شرایط در رصدهای مختلف در گزینهٔ "الف"» می‌توانند سبب افزایش دقت شوند.

جدول ۲. نحوهٔ استدلال در مسئلهٔ ریاضی دنیای واقعی (محل وقوع آذرخش)

٦. همان‌طور که می‌دانیم، مدتی پس از دیدن رعدوبرق در آسمان، صدای آن را می‌شنویم. این پدیده به‌دلیل بیشتر بودن سرعت نور نسبت به سرعت صداست. تابه‌حال به این فکر کرده‌اید که چقدر با محل وقوع رعدوبرق فاصله دارید؟ سرعت صوت ۳٤۳ متر بر ثانیه است. اگر ٦ ثانیه بعد از دیدن رعدوبرق صدای آن را بشنوید، چند کیلومتر تا محل وقوع فاصله دارید؟ آیا در حالت کلی می‌توانید نتیجه‌گیری کنید؟	
دانش‌آموز (۱)	فاصله تا رعدوبرق را با کمک حاصل‌ضرب زمان در سرعت به دست آورد و در حالت کلی، به‌درستی نتیجه گرفت که باید در دنیای واقعی، زمان بگیریم که بعد از دیدن صاعقه، چند ثانیه طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم و درنتیجه، زمان اندازه‌گیری‌شده را در سرعت صوت ضرب می‌کنیم.
دانش‌آموز (۲)	از جدول نسبت و تناسب استفاده کرد و خود را در موقعیت مسئله قرار داد و آن را در حالت کلی بیان کرد.
دانش‌آموز (۳)	از ضرب بین ٦ و سرعت صوت استفاده کرد.
دانش‌آموز (٤)	از ضرب بین ٦ و سرعت صوت استفاده کرد، ولی نتوانست مسئله را درزمینهٔ دنیای واقعی حل کند. نظرش این بود که این رخداد چنان سریع پیش می‌آید که او نمی‌تواند واکنش نشان دهد.
دانش‌آموز (٥)	از ضرب بین ٦ و سرعت صوت استفاده کرد، اما به پاسخ خود شک داشت.
دانش‌آموز (٦)	از نسبت و تناسب استفاده کرد، ولی نتوانست خود را در موقعیت مسئله قرار دهد.
⋮	⋮

در آخرین سؤال که به‌منظور سنجش سطح ارزشیابی در یادگیری دانش‌آموزان مطرح شده و مطابق با مورد پنجم است، از آن‌ها خواسته شد که یک موضوع پژوهشی مناسب را که مرتبط با طبیعت است (مانند مدل هندسی دانهٔ برف کخ، روش ایجاد شکل و گسترش الگویی آن برای تحقیق) انتخاب کنند و انتظار می‌رفت که بتوانند گزینهٔ «انجام استدلال جدیدتر و دقیق‌تر هندسی، بسط و توسعهٔ مدل دانهٔ برف» را که از بین گزینه‌ها بیشترین تطابق را با کار سه مرحلهٔ حل مسئله دارد، انتخاب کنند (پرسش‌نامهٔ آزمون در ضمیمهٔ مقاله قابل‌مشاهده است).

یافته‌ها و تجزیه‌وتحلیل داده‌ها

الف) آمار توصیفی

همان‌طور که اشاره شد، این پژوهش به روش کاربردی و شبه‌آزمایشی است و با اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون صورت گرفته است؛ یعنی در شرایطی که فقط گروه آزمایش در معرض متغیر مستقل، یعنی آموزش درس «مهارت اثبات و استدلال با روش میسون، بورتن و استیسی» قرار گرفته‌اند، مقایسهٔ دو گروه آزمایش و کنترل صورت می‌گیرد. همچنین انتخاب و جایگزینی آزمودنی‌ها به‌صورت تصادفی انجام نشده و تعیین و ترکیب گروه آزمایش و کنترل قبل از انجام پژوهش صورت گرفته است. تلاش شده است که این دو گروه تا حد ممکن شبیه در نظر گرفته شوند؛ یعنی معدل میانگین هردو کلاس نزدیک به هم باشد. درنهایت، اندازه‌گیری تأثیر متغیر مستقل ازطریق یک پس‌آزمون روی هر دو گروه به‌صورت هم‌زمان انجام گرفته است. این همسانی در پیش‌آزمون قابل‌مشاهده است.

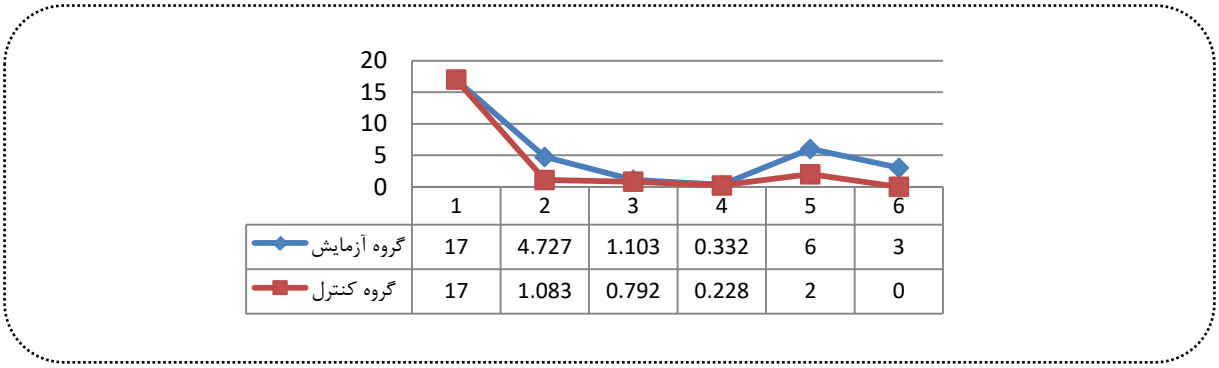
جدول ۳. شاخص‌های آماری پیش‌آزمون گروه آزمایش و گروه کنترل

گروه	نمونه	میانگین نمره	انحراف استاندارد	خطای استاندارد از میانگین	حداکثر نمره	حداقل نمره
گروه آزمایش	۱۷	۰/۹۱۵	۰/۸۷	۰/۲۵	۲	۰
گروه کنترل	۱۷	۰/۹۲	۰/۷۹۲	۰/۲۱	۲	۰

جدول ٤. شاخص‌های آماری پس‌آزمون گروه آزمایش و گروه کنترل

گروه	نمونه	میانگین نمره	انحراف استاندارد	خطای استاندارد از میانگین	حداکثر نمره	حداقل نمره
گروه آزمایش	۱۷	٤/۷۲۷	۱/۱۰۳	۰/۳۳۲	٦	۳
گروه کنترل	۱۷	۱/۰۸۳	۰/۷۹۲	۰/۲۲۸	۲	۰

در جدول ۳، شاخص‌های آماری پیش‌آزمون برای هر دو گروه تقریباً یکسان است. جدول ٤ شاخص‌های آماری پس‌آزمون را برای دو گروه کنترل و گروهِ آزمایش نشان می‌دهد. همان‌طور که مشهود است، میانگین نمرهٔ دانش‌آموزان گروه کنترل در پس‌آزمون ۱/۰۸۳ با حداقل نمرهٔ صفر و حداکثر ۲ است؛ اما در گروه آزمایش، میانگین نمره ٤/۷۲۷ با حداقل نمرهٔ ۳ و حداکثر نمرهٔ ٦ است. این اختلاف در میانگین نشان می‌دهد که درس مهارت اثبات و استدلال با روش میسون، بورتن و استیسی تأثیر بسزایی در پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به پرسش‌نامه داشته و یادگیری شناختی مدل‌سازی در دانش‌آموزانی که درس مهارت اثبات و استدلال را گذرانده‌اند، مشهودتر است. توزیع نمونهٔ گروه کنترل و آزمایش در پس‌آزمون نیز در نمودار ۱ نمایش داده شده است.



نمودار ۱. توزیع پس‌آزمون گروه آزمایش و کنترل

از منظرِ یادگیری شناختی، تعداد دانش‌آموزانی که در گروه آزمایش به سؤالات متناظر با سطوح مختلف یادگیری شناختی پاسخ درست داده‌اند، در جدول ۵ آمده است. همان‌طور که دیده می‌شود، در گروهِ آزمایش، تعداد پاسخ‌های صحیح در سطح کاربرد و در یکی از سؤالات سطح تحلیل، بیشتر است و در سؤال سطح ترکیب، از همه کمتر است. در گروه کنترل نیز با روش معمول سخنرانی، آموزش و یادگیری درزمینهٔ مهارت استدلال و اثبات، تقریباً همین روند برقرار است؛ به‌علاوه تک‌سؤالِ سطح یادگیری آزمون (مانند سؤال سطح ترکیب) هیچ پاسخ صحیحی نداشته است. این نتایج نشان می‌دهند که یادگیری شناختی دانش‌آموزان گروه آزمایش در سطح کاربرد و تحلیل نسبتاً خوب است و در سطوح بالاتر ترکیب و آزمون، به توجه بیشتری نیاز دارد. تعداد کم پاسخ‌های صحیح نسبت به پاسخ‌های غلط گروه کنترل نیز بیانگر نقصان توانایی درک مدل‌سازی در ریاضی در حل مسئله برای این گروه است.

جدول ۵. تعداد پاسخ‌های صحیح به سؤالات پس‌آزمون گروه آزمایش و کنترل

	گروه آزمایش						گروه کنترل					
	تعداد پاسخ‌های صحیح			تعداد پاسخ‌های غلط			تعداد پاسخ‌های صحیح			تعداد پاسخ‌های غلط		
سه سؤال **سطح** کاربرد	۱۶	۱۶	۱۵	۱	۱	۲	۵	۲	۳	۱۲	۱۵	۱۴
دو سؤال **سطح** تحلیل	۱۵	۱۶		۲	۱		۲	۱		۱۵	۱۶	
یک سؤال **سطح** ترکیب	۱۴			۳			۰			۱۷		
یک سؤال سطح **ارزشیابی**	۱۵			۲			۱			۱۶		

ب) آمار استنباطی

ابتدا نرمال بودن چولگی و کشیدگی توزیع داده‌ها را بررسی می‌کنیم و در صورتی که مقدار آن در بازهٔ (۲، ۲-) قرار داشته باشد، نرمال بودن داده‌ها را با آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف می‌سنجیم. جدول ٦ مقادیر چولگی و خمیدگی نمرات پس‌آزمون گروه آزمایش و گروه کنترل را در پس‌آزمون نشان می‌دهد که به ترتیب دارای مقادیر ۰/۴۳۷- و ۰/۹۲۳- برای گروه آزمایش و ۰/۱۶۱- و ۱/۲۶۱- برای گروه کنترل است و نشان می‌دهد که داده‌ها به توزیع نرمال نزدیک هستند.

جدول ٦. مقادیر چولگی و خمیدگی نمرات پس‌آزمون

گروه	میانگین نمره	انحراف استاندارد	چولگی	کشیدگی
آزمایش	٤/۷۲۷	۱/۱۰۳	-۰/٤۳۷	-۰/۹۲۳
کنترل	۱/۰۸۳	۰/۷۹۲	-۰/۱٦۱	-۱/۲٦۱

حال می‌توان برای سنجش نرمال بودن داده‌ها، از آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف استفاده کرد. همان‌طور که در جدول ۷ مشهود است، مقدار آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف برای پرسش‌نامه برابر ۰/۲۰۹ با سطح معناداری ۰/۱۵۳ است که چون از مقدار ۰/۰۵ بزرگ‌تر است، پس در این سطح معنادار نیست و می‌توان نتیجه گرفت که توزیع داده‌های فرضیهٔ تحقیق به‌صورت نرمال است و درنهایت مجاز به استفاده از آزمون پارامتریک از نوع آزمون T[1] دو نمونهٔ مستقل هستیم.

۱. گروه آزمایش و کنترل دو نمونهٔ مستقل هستند، ولی متغیر مستقل و مداخله‌گر «روش تدریس میسون، بورتن و استیسی با کمک مدل‌سازی ریاضی» است.

جدول ۷. نتایج آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف

	مقدار آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف	سطح معناداری
پس‌آزمون	۰/۲۰۹	۰/۱۵۳

فرضیهٔ تحقیق ما این بود که دانش‌آموزانی که درس مهارت اثبات و استدلال در حل مسئله با روش میسون، بورتن و استیسی را با کمک مدل‌سازی ریاضی در کلاس مجازی با موفقیت گذرانده‌اند، نسبت به دانش‌آموزان مشابهی که این درس را با روش سخنرانی کلاس مجازی متداول گذرانده‌اند، درک بیشتری از فرایند مدل‌سازی دنیای واقعی با روش علمی دارند.

در جدول ۸ که نتایج آزمون T را نشان می‌دهد، دیده می‌شود که بین گروه کنترل و آزمایش در پس‌آزمون تفاوت معنادار T= -۹/۱۵٤ در سطح معناداری ۰/۰۰۰٦ وجود دارد که چون از سطح معناداری ۰/۰۵ کمتر است، نشان می‌دهد بین دانش‌آموزان گروه کنترل و آزمایش تفاوت وجود دارد. باتوجه‌به اینکه میانگین نمرهٔ آزمون گروه آزمایش بیشتر از گروه کنترل است، پس می‌توان فرضیهٔ پژوهش را تأیید کرد. بنابراین می‌توان گفت دانش‌آموزانی که درس «مهارت استدلال و اثبات با روش میسون، بورتن و استیسی، شامل سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی» را با موفقیت گذرانده‌اند، نسبت به دانش آموزان مشابهی که این درس را به‌صورت سخنرانی معمول گذرانده‌اند، درک بیشتری از فرایند مدل‌سازی در روش علمی دارند.

بنا بر جدول ۹ که تحلیل کوواریانس یک‌راهه است، چون α<P=۰/۰۷۳۱۳ است، فرضیهٔ تحقیق قابل‌قبول است.

جدول ۸. نتایج آزمون T دونمونه‌ای مستقل فرضیهٔ تحقیق

گروه	فراوانی	میانگین	انحراف استاندارد	میانگین خطای استاندارد	مقدار T	سطح معنادار
آزمایش	۱۷	٤/۷۲۷	۱/۱۰۳	۰/۳۳۲	-۹/۱٥٤	۰/۰۰۰٦
کنترل	۱۷	۱/۸۰۳	۰/۷۹۲	۰/۲۲۸		

جدول ۹. نتایج تحلیل کوواریانس یک‌راههٔ تک‌متغیره روی نمرات پس‌آزمون گروه‌های آزمایش و کنترل

	مجموع مجذورات	درجهٔ آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنادار	مجذور اتا
بین گروه‌ها	۱۳/۳٦٥۷	۱	۱۳/۳٦٥۷	٤/۲٥۱۹	۰/۰۷۳۱۳	۰/۳٥
خطا	۲٥/۱٤۷۷	۳۳	۳/۱٤۳٥			
کل	۳۸/٥۱۳٤	۳٤	٤/۲۷۹۳			

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با عنوان «بررسی تأثیر روش حل مسئلهٔ مبتنی‌بر مدل میسون، بورتن و استیسی با کمک مدل‌سازی ریاضی بر یادگیری دانش‌آموزان در درس اثبات و استدلال بر بستر آموزش مجازی دانش‌آموزان پایهٔ نهم»، با هدف بررسی چگونگی اثبات و استدلال دانش‌آموزان در کلاس درس و رویکرد آن‌ها به این دو مهارت و سپس تأثیر این دو مهارت بر حل مسائل ریاضی در زندگی واقعی آن‌ها انجام گرفته است.

این تحقیق با روش‌شناسی کاربردی و شبه‌آزمایشی در طرح مقایسه‌ای با کمک پیش‌آزمون و پس‌آزمون انجام شده است. جامعهٔ آماری تحقیق حاضر ۳٤ نفر از

دانش‌آموزان دختر پایهٔ نهم متوسطه از مناطق نوزده‌گانهٔ سازمان آموزش‌وپرورش شهر تهران در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ هستند که با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای، یک منطقه به‌طور تصادفی انتخاب شد. سپس از بین مدارس متوسطهٔ اول دخترانهٔ منطقهٔ ٤، یک دبیرستان (متوسطهٔ اول) به‌صورت خوشه‌ای انتخاب گردید و درنهایت در مدرسه تقریباً به‌نسبت تعداد دانش‌آموزان آن منطقه و مدرسه، دانش‌آموزان دختر دو کلاس به‌عنوان آزمودنی‌های تحقیق پایهٔ نهم متوسطه برحسب نمونه‌گیری تصادفی انتخاب شدند. این مدرسه عادی بود. گروه آزمایش دانش‌آموزانی بودند که در فصل سوم کتاب ریاضی پایهٔ نهم، درسی را با عنوان «دو مهارت استدلال و اثبات با استفاده از روش حل مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی (شامل سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی)» گذرانده بودند. نحوهٔ درک فراگیران در برخورد با مسائل ارزیابی شد و تلاش بر این بود که در سؤالات اثباتی به این سه مرحله توجه شود و تأثیر آن بر حل سؤالات ریاضی در دنیای حقیقی بررسی گردد. دانش‌آموزان گروه کنترل این درس را به‌صورت روش متداول سخنرانی باتوجه‌به مطالب کتاب درسی گذراندند. تدریس برای هر دو کلاس به‌صورت مجازی انجام شد، به‌این‌ترتیب که مطالب کتاب به کمک توضیحات معلم به‌صورت صوت در شبکهٔ شاد و به‌صورت تصویری در فضای ادوبی‌کانکت به‌صورت برخط ارائه شد یا آفلاین در دسترس دانش‌آموزان قرار گرفت.

بعد از پیش‌آزمون برگزارشده و تکمیل درس با روش‌های مشخص‌شده در گروه آزمایش و کنترل، نخست به دانش‌آموزان سؤالاتی در محدودهٔ کتاب درسی‌شان داده شد و از دانش‌آموزان خواسته شد بنا بر آموزش‌هایی که در کلاس درس داشته‌اند، به سؤال‌ها جواب دهند. سپس از دانش‌آموزان گروه آزمایش خواسته شد با کمک سه مرحلهٔ ورود، حمله و بررسی، به حل سؤالات بپردازند. باتوجه‌به بهبود مهارت اثبات و استدلال فراگیران هر دو گروه، عملکرد آن‌ها در پاسخ به سؤالات ریاضی دنیای حقیقی ارزیابی شد.

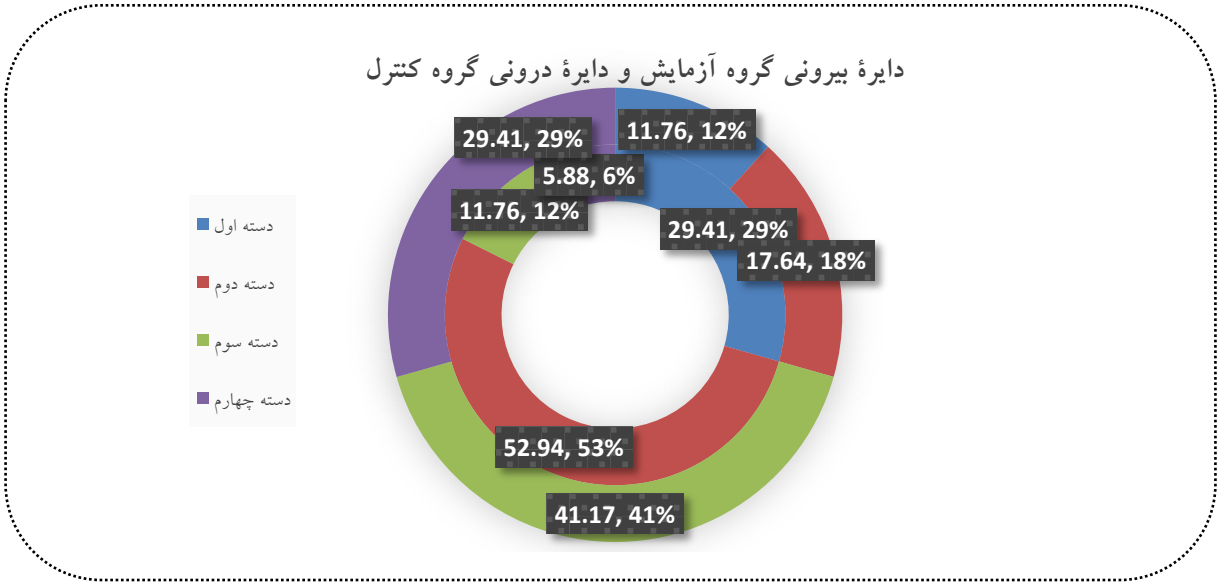
در پاسخ به پرسش پژوهش که فراگیر می‌تواند در بحث‌وجدل روزمره از مهارت استدلال و اثبات کمک بگیرد، بنا بر پاسخ‌های تشریحی به سؤالات پس‌آزمون (قابل‌مشاهده در جدول‌های ۱ و ۲)، دانش‌آموزان گروه آزمایش استدلال و اثبات را در زندگی روزانهٔ خود، مانند گفت‌وگوها و بحث‌هایی که در طی روز انجام می‌پذیرد، مهم می‌دانند؛ اما نسبت به اثبات و استدلالی که در کتاب ریاضیات متوسطهٔ اول آمده است، آن را دارای نقش چندانی در زندگی حقیقی خود نمی‌دانند. دانش‌آموزان گروه آزمایش و کنترل در مواجهه با سؤالات اثباتی، چهار دسته هستند: دستهٔ اول که اکثریت را تشکیل می‌دهند، ضرورت اثبات را درک نمی‌کنند. دستهٔ دیگر فقط بنا بر شهود خود استدلال می‌کنند و توجهی به فرضیات مسئله برای استدلال رسمی ندارند. دستهٔ سوم افرادی هستند که استدلال و اثبات‌های نوشته‌شده در کتب درسی ریاضی را به‌خاطر می‌سپارند و به اصل و مفهوم آن توجهی ندارند. دستهٔ چهارم دانش‌آموزانی هستند که سعی دارند برای اثبات‌های خود، دلیل و استدلال مناسبی بیان کنند؛ ولی چون مهارت کافی ندارند، دچار اشتباه می‌شوند.

بنا بر عملکرد شرکت‌کنندگان این پژوهش، دانش‌آموزان دستهٔ اول و دوم که اثبات‌ها را بدون درک و فهم آن حفظ کرده‌اند، توانایی توضیح دلیل و استدلال خود را ندارند. ۸۱ درصد آن‌ها از گروه کنترل هستند. دستهٔ سوم و چهارم دانش‌آموزانی هستند که سعی کردند با استفاده از شهود خود، به‌ویژه در مسائل دنیای حقیقی، ایده‌های اثبات را درک کنند و براساس انتظارها و وضعیت آموزش رسمی، سریع‌تر پیشرفت کنند.

مسئلهٔ طرح‌شدهٔ پژوهش: آیا قادریم توانایی استدلالی و اثباتی را برای مهارت‌های حل مسائل روزمرهٔ زندگی ازطریق روش تدریس میسون، بورتن و استیسی با کمک مدل‌سازی ریاضی افزایش دهیم؟

با ایجاد چالش دربارهٔ اثبات شهودی و به کمک مثال‌های عددی و استفاده از چهارچوب روش حل

مسئلهٔ میسون، بورتن و استیسی (شامل سه مرحلهٔ «ورود»، «حمله» و «بررسی»)، لزوم اثبات‌های بیان‌شده و مهارت دانش‌آموزان در اثبات و استدلال، با اندازه‌گیریِ تأثیر متغیر مستقل (ازطریق یک پس‌آزمون) بر هر دو گروه به‌صورت هم‌زمان بررسی شد و سؤالات آن متناظر با سطوح مختلف یادگیری شناختی تنظیم گردید.



نمودار ۲. درصد هر دسته در گروه‌های آزمایش و کنترل

تجزیه‌وتحلیل آمار توصیفی نتایج نشان می‌دهد که یادگیری شناختی دانش‌آموزان گروه آزمایش در سطح کاربرد و تحلیل نسبتاً خوب بوده و در سطوح بالاتر ترکیب و آزمون نیازمند توجه بیشتری است. در گروه کنترل نیز نقصان توانایی درک مدل‌سازی در مهارت استدلال به چشم می‌خورد. درنهایت، نتایج آمار استنباطی ازطریق آزمون T دونمونه‌ای مستقل و کوواریانس یک‌راهه نشان می‌دهد که فرضیهٔ تحقیق موردتأیید است و درک بهتری از فرایند مدل‌سازی در روش اثبات و استدلال ارائه می‌دهد.

پژوهش‌های دیگری نیز درزمینهٔ به‌کارگیری اثبات و استدلال برای بهبود شناخت دانش‌آموزان و دانشجویان از روش علمی و مدل‌سازی انجام شده است که نتایج آن‌ها با نتایج پژوهش حاضر سازگار است؛ مثلاً تحقیق کوهن [۲۱] و وس [۲۶] نشان می‌دهد که گذراندن دورهٔ مدل‌سازی در حل مسئله به معلمان کمک می‌کند از این مباحث در کلاس استفاده کنند. آن‌ها استفاده از اثبات و استدلال را روشی منطقی برای بهبود کیفیت ارائهٔ مباحث ناشی از مدل‌سازی برای معلمان در کلاس درس می‌دانند. همچنین کیپنیز (۱۹۹۸) [۳۹] بیان می‌کند که مدل‌ها در طول تاریخ درک دانش‌آموزان را از روش علمی در هر دو جنبهٔ عینی و ذهنی تقویت می‌کنند. تحقیق زولی و بن آوی[1] [۴۰] نیز همچون تحقیق پیش‌رو، مدل‌سازی را ابزاری عالی برای کسب بینش دربارهٔ سرشت استدلال می‌داند؛ چراکه اثبات علاوه‌بر بیان استدلال برای رد یا پذیرش حل مسئله، به دانش‌آموز کمک می‌کند تا مدل‌های ارائه‌شده در طول تحصیل را در بستر زندگی روزمره راحت‌تر نقد و بررسی کند.

براین‌اساس، نتایج سایر محققان بررسی گردید. نکتهٔ درخور توجه این است که هیچ‌یک از تحقیقات فوق مانند پژوهش پیش‌رو دارای تحلیل آماری نبوده‌اند و بیشتر به بررسی نحوهٔ استفاده از این روش در کلاس پرداخته‌اند. درزمینهٔ تحلیل آماری، پایان‌نامهٔ تحقیقی علی‌پناه و دیگران [۴۱] با تجزیه‌وتحلیل کیفی آماری

1. Zeuli and Ben-Avie

نشان داد افزایش مهارت‌های استدلالی در مسائل اثباتی و گسترش توجه به آن در سؤال‌های غیرهندسی، باعث عملکرد مطلوب‌تر دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی دنیای واقعی می‌شود. همچنین دانش‌آموزان با سؤال‌هایی که می‌توانند خود را در موقعیت واقعی (مدل‌سازی) آن قرار دهند، برخورد بهتری دارند و برای پاسخ‌گویی به آن‌ها اشتیاق و انگیزهٔ بیشتری نشان می‌دهند و با استدلال شهودی، آن‌ها را برای خود معنادار می‌کنند.

شایان ذکر است که در این پژوهش، مانند پژوهش‌های دیگر، به‌رغم تلاش برای از بین بردن متغیرهای مزاحم، نمی‌توان تأثیرات کشف‌شده را کاملاً علّی فرض کرد و ممکن است این تأثیرات با متغیرهای دیگری هم ارتباط داشته باشند. برای نمونه، ممکن است برخی از دانش‌آموزان گروه آزمایش که درس اثبات و استدلال را با روش میسون، بورتن و استیسی گذرانده‌اند، نسبت به دانش‌آموزان گروه کنترل، علاقهٔ بیشتری به اثبات داشته و حتی در این زمینه مطالعاتی خارج از برنامهٔ درسی نیز داشته باشند یا کلاس‌های مجازی در آموزش هر دو گروه اثر گذاشته باشند.

در تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود برای اطمینان از نتایج تحقیق و تأیید آن، پژوهش‌هایی این‌گونه برای دانش‌آموزان همسان به‌صورت کلاس‌های حضوری انجام شود تا روش تحقیق، جمع‌آوری داده به‌منظور دستیابی به مدلی کاربردی‌تر در مدل نهایی پژوهش و اعتباریابی کیفی، به‌صورت دقیق‌تر با ملاک‌های بیشتری روی مدل صورت گیرد.

منابع

1. Stacey K., L. Burton J. Mason. Thinking mathematically. Addison-Wesley London. 1982.

2. Kolar-Begovic Z., R. Kolar-Šuper, L. Jukic Matic. Mathematics Education as a Science and a Profession. Online Submission. https://eric.ed.gov/?id=ED577935. 2017.

۳. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی. تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضیات. تهران: واحد تحقیق (سازمان پژوهش)، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۹٤.

4. Sinnott-Armstrong, W. Understanding arguments: An introduction to informal logic. Australia: Cengage Learning. Edited by Robert J. Fogelin. 2015 https://philpapers.org/rec/SINUAA-3

5. Evans J.S.B. Thinking and reasoning: A very short introduction. Vol. 533. Oxford University Press. 2017.

6. Van Eemeren F.H., P. Houtlosser, A.F.S. Henkemans. Argumentative indicators in discourse: A pragma-dialectical study. Springer. 2007 https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4020-6244-5

7. Andriessen J.M., Baker D. Suthers. Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions, in Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments. Springer. 2003; 1-25.

۸. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی. تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضیات. تهران: واحد تحقیق (سازمان پژوهش)، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۹٦.

9. Hanna G., M. de Villiers, I.P. Committee, ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. ZDM. 2008; 40: 329-336.

10. Ball D.L., H. Bass. Making mathematics reasonable in school. A research companion to principles and standards for school mathematics. 2003; 27-44.

۱۱. چمن‌آرا، سپیده. تأثیرات رفتارگرایی بر آموزش ریاضی و نظرات منتقدان آن. رشد آموزش ریاضی، ۱۳۸۲؛ ۱(۷۱): ۲۱-۱۱.

۱۲. امیری حمیدرضا، ایران‌منش علی، حمزه‌بیگی طیبه، داودی خسرو، رستمی محمدهاشم، ریحانی ابراهیم،

سیدصالحی محمدرضا، شاهورانی احمد، میرشهرام صدر. کتاب راهنمای معلم ریاضی نهم دورهٔ اول متوسطه. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۸.

۱۳. ربی سیما، اصغری نسیم. بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی. مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱٤۰۱؛ ۱۱(۳۱): ۳۸۷-۲۵۲.

۱٤. معاونت آموزشی وزارت علوم. نکته‌های اساسی در حفظ کیفیت آموزشی دانشگاه‌های کشور در شرایط مقابله با کرونا. تهران: وزارت علوم، دفتر برنامه‌ریزی آموزش عالی، ۱۳۹۹.

۱۵. سلیمی سمانه، فردین محمدعلی. نقش ویروس کرونا در آموزش مجازی با تأکید بر فرصت‌ها و چالش‌ها. فصلنامهٔ علمی پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی، ۱۳۹۹؛ ۸(۲): ٦۰-٤۹.

16. Chirinda B., M. Ndlovu, E. Spangenberg. Teaching mathematics during the COVID-19 lockdown in a context of historical disadvantage. Education Sciences, 2021; 11(4): 177. https://doi.org/10.3390/educsci11040177

۱۷. غلامی اعظم، جلالی حوا. تأثیر آموزش مجازی بر میزان یادگیری درس زیست‌شناسی در دانش‌آموزان دختر پایهٔ یازدهم شهرستان دلگان. نشریهٔ پویش در آموزش علوم پایه، ۱۳۹۸؛ ۵(۱۷): ۲۱-۱. https://journals.cfu.ac.ir/article_1007.html

18. Blum W. M. Niss. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. Educational studies in mathematics, 1991; 22(1): 37-68.

۱۹. عظیم‌پور سهراب، واحدی حسین. تأثیر رسانه‌های آموزشی الکترونیکی بر پیشرفت تحصیلی و خودکارآمدی تحصیلی هندسه. فناوری آموزش، ۱٤۰۲؛ ۱۷(٤): ۸۲٤-۸۱۱. tej.2023.9760.2896

20. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Ed. Principles and standards for school mathematics. Reston. NASSP Bulletin. 2020; 85(623): 35-42. doi:10.1177/019263650108562305

21. Kuhn, D. Teaching and learning science as argument. Science Education. 2010; 94(5): 810-824.

22. Niss M., W. Blum. The learning and teaching of mathematical modelling. Routledge is an imprint of the Taylor & Francis Group. 2020.

23. Ennis, R. Critical thinking: Reflection and perspective Part II. Inquiry: Critical thinking across the Disciplines. 2011; 26(2): 5-19. https://doi.org/10.5840/inquiryctnews20112 6215

۲٤. فتحی واجارگاه کوروش، موسی‌پور نعمت‌الله، یادگارزاده غلامرضا. برنامه‌ریزی درسی آموزش عالی (مقدمه‌ای بر مفاهیم، دیدگاه‌ها و الگوها). تهران: کتاب مهربان، ۱۳۹۷.

۲۵. برادران محمد، محمدی‌پور محمد، مهدیان حسین. مدل علّی توانایی حل مسئلهٔ ریاضی دانش‌آموزان براساس مهارت تفکر انتقادی با نقش میانجی انگیزهٔ پیشرفت و نگرش به ریاضیات. مطالعات روان‌شناسی تربیتی، ۱۳۹۹؛ ۱۷(۳۷): ۵۲-۲۷. doi: 10.22111/jeps.2020.5169

26. Vos, P. How real people really need mathematics in the real world—Authenticity in mathematics education. Education Sciences. 2018; 8(4): 195. https://doi.org/10.3390/educsci8040195

27. Akbari Ahmadsaraei, H., H. Maghami, Y. Mahdavi Nasab. The effect of Educational Multimedia on understanding the concept and solving Mathematical Problems of Fifth Grade Students. Educational Technologies in Learning. 2018; 4(14): 23-51. https://doi.org/10.22054/jti.2020.49991.1300

۲۸. داشته امیرحسین، نوریان محمد، سمیعی زفرقندی مرتضی. طراحی الگوی عوامل مؤثر بر فعالیت‌های خلاقانهٔ دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه در درس ریاضی. پژوهش در برنامه‌ریزی درسی، ۱٤۰۰؛ ۱۸(۷۰): ۱۷۲-۱۵۲. jsre.2021.1923559.1844/10,30486

29. Barak O. M. Tsodyks. Mathematical models of learning and what can be learned from them. Current Opinion in Neurobiology. 2023; 80: 102721. https://doi.org/10.1016/j.conb.2023.102721

30. Verschaffel, L. Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level. in International conference on. 2007.

۳۱. عبداله‌پور کاظم، رفیع‌پور ابوالفضل. پدیدارشناسی چرخهٔ مدل‌سازی دانش‌آموزان پایهٔ نهم در حل یک مسئلهٔ اصیل. فناوری آموزش، ۱۳۹۶؛ ۱۱(۲): ۱۶۰-۱۴۹. https://doi.org/10.22061/tej.2017.634

32. Parhizgar Z, Liljedahl P. Chapter 10: Teaching modelling problems and its effects on students' engagement and attitude toward mathematics. Affect in mathematical modeling, Cham: Springer International Publishing. 2019; 235-256. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9-15

۳۳. کریم‌آبادیان، محبوبه. تأثیر آموزش ریاضیات بر توانایی‌های حل مسئله و تفکر منطقی در دانش‌آموزان ابتدایی. دومین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش، مطالعات اجتماعی و فرهنگی با رویکرد آینده‌پژوهی، ۱۴۰۲. https://civilica.com/doc/1803656

۳۴. حسینی شکرابی فرخنده، بیگ‌زاده کلثوم. بررسی سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان در آموزش مجازی با نرم‌افزار براساس نظریهٔ ون هیلی. پژوهش در آموزش ریاضی، ۱۴۰۲؛ ۳(۲): ۷۹-۶۷. https://www.magiran.com/p2871930

35. Keegan D. Distance training: Taking stock at a time of change. 2003, Routledge is an imprint of the Taylor & Francis Group.

36. Sala Sebastià G., B. Barquero, V. Font. Inquiry and modeling for teaching mathematics in interdisciplinary contexts: How are they interrelated? Mathematics, 2021; 9(15): 1714. https://doi.org/10.3390/math9151714

۳۷. یافتیان نرگس، ابراهیمی علویجه محمد. بررسی میزان تأکید کتاب درسی ریاضی نهم بر آموزش حل مسائل دنیای واقعی. آموزش‌پژوهی نوین، ۱۴۰۰؛ ۲۵(۷): ۹۸-۸۶.

۳۸. اصلاح‌پذیر بهمن، ایرانمنش علی، بیژن‌زاده محمدحسن، داودی خسرو، رستگار آرش، ریحانی ابراهیم، نائینی کاظم، شاهورانی احمد، عالمیان وحید. ریاضی پایهٔ هفتم دورهٔ اول متوسطه. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۴.

39. Kipnis, N. Theories as models in teaching physics. Science & Education. 1998; 7(3): 245-260. https://doi.org/10.1023/A:1008697202578

40. Zeuli, J.S. M. Ben-Avie. Connecting with students on a social and emotional level through in-depth discussions of mathematics. How social and emotional development add up: Getting results in math and science education. 2003; 36-64.

۴۱. علی‌پناه سمیه، گویا زهرا، ظهوری زنگنه بیژن. نقش اثبات و استدلال در حل مسائل ریاضی زندگی واقعی. پایان‌نامهٔ رشتهٔ ریاضی دانشگاه شریف، ۱۴۰۰.

۴۲. امیری حمیدرضا، ایرانمنش علی، بیژن‌زاده محمدحسن، سیدصالحی محمدرضا، حمزه‌بیگی طیبه، داودی خسرو، رستمی محمدهاشم، ریحانی ابراهیم، شاهورانی احمد، میرشهرام صدر. ریاضی پایهٔ نهم دورهٔ اول متوسطه. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۴.

۴۳. احمدی محمدحسین، اخلاقی‌نیا نرگس، زارع شحنه عبدالرضا، صدری سعید، قصاب علی. ریاضی تکمیلی سال سوم دورهٔ راهنمایی. تهران: سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان: ادارهٔ کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی، ۱۳۹۵.

۴۴. امیری حمیدرضا، ایرانمنش علی، ایزدی مهدی، بروجردیان ناصر، بیژن‌زاده محمدحسن، داودی خسرو، رستمی محمدهاشم، ریحانی ابراهیم، شاهورانی احمد، میرشهرام صدر. حسابان ۱ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۴۰۰.

ضمیمه

مسئلهٔ ۱. اگر $a,b>0$ و $a^2>b^2$، نشان دهید $a>b$ [12].

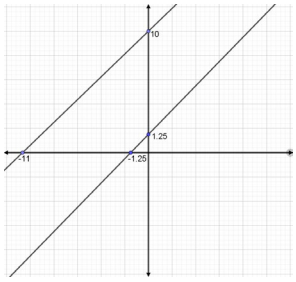
الف) داده‌های مسئله کافی نیستند.

ب) حکم اشتباه است.

ج) اگر از طرفین فرض جذر دوم گرفته شود، به حکم خواهیم رسید.

د) چون متغیرها مثبت هستند، از طرفین فرض دوم جذر دوم می‌گیریم و حکم اثبات می‌شود.

مسئلهٔ ۲. دو خط زیر را در نظر بگیرید. به نظر شما، آیا این دو خط همدیگر را قطع می‌کنند [۴۲]؟



شکل ۱: خطوط موازی یا متقاطع

الف) در شکل به نظر می‌رسد موازی هستند.

ب) باتوجه‌به مقادیر روی محور خط (۰، ۱۱-) و (۱۰، ۰) و مقایسهٔ آن با مقادیر روی محور خط (۰، ۱/۲۵-) و (۱/۲۵، ۰) موازی هستند.

ج) خطی که نقاط روی محور (۰، ۱/۲۵-) و (۱/۲۵، ۰) است موازی خط $y=x$ است، ولی خطی که روی محور (۰، ۱۱-) و (۱۰، ۰) است، موازی نیمساز ربع اول و چهارم نیست.

د) بنا بر داده‌های مسئله نمی‌توان تصمیم گرفت.

مسئلهٔ ۳. باتوجه‌به اهمیت وزن مناسب انسان، جدولی برای وزن مناسب افراد باتوجه‌به قدشان وجود دارد. تعدادی از این موارد را در جدول زیر مشاهده می‌کنید. قد شما چند سانتی‌متر است و باتوجه‌به جدول زیر، به نظرتان چگونه می‌توانید وزن مناسب خود را محاسبه کنید [۴۳]؟

جدول ۸: وزن متناسب افراد نسبت به قد

وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
۸۱	۱۹۰
۷۲	۱۸۰
۶۳	۱۷۰

الف) با داشتن جدول بالا می‌توانید تناسب مناسب را ایجاد کنید و مقدار به‌دست‌آمده را گرد آورید و سپس از عدد ۵ کم کنید. مقدار وزن مناسب متناسب با قد خود را خواهید یافت و این الگو مناسب است.

ب) ابتدا بنا بر جدول ۸ برای قد ۲۰۰ سانتی‌متر، ۱۶۰ و ۱۵۰سانتی‌متر، به کمک تناسب، مقدار را پیدا کرده و آن را گرد کنید و سپس از عدد ۵ کم کنید. به‌این‌ترتیب، الگویی ساخته می‌شود. حال جدول جدید را ایجاد کنید. قد شما به هریک از اعداد جدول جدید نزدیک بود، تناسب بسته و مقدار وزن متناسب با قد خود را پیدا کنید. اگر وزن شما بیشتر از آن بود، پس اضافه‌وزن دارید و اگر کمتر بود، شما ضعیف هستید.

ج) باتوجه‌به نسبت‌های تشکیل‌شده، جدول ۸ غلط است.

د) با کمک نسبت‌های وزن و قد می‌توانید وزن متناسب با قد خود را بیابید.

مسئلهٔ ٤. برای کادو کردن یک کاسهٔ سفالی به‌شکل نصف توپ فوتبال، به چه مقدار کاغذکادو نیاز داریم؟ چطور حداقل مقدار کاغذکادوی موردنیاز را بیابیم؟ به چه محاسباتی نیاز داریم [۵]؟

الف) ابتدا به شکل کاسه توجه کنیم: این کاسه درواقع یک نیم‌کره است (یا بخشی از یک کره). چون قرار است فقط سطح خارجی آن کادوپیچ شود، به مساحت سطح خارجی نیاز داریم. طبق فرض مسئله، این سطح خارجی معادل نصف سطح یک توپ فوتبال (یعنی سطح یک نیم‌کره) است. بنابراین کاسه به‌شکل نیم‌کره در نظر گرفته می‌شود. ابتدا قطر کاسه را محاسبه می‌کنیم، سپس با استفاده از فرمول

مساحت سطح نیم‌کره، مقدار آن را به دست می‌آوریم. در مرحلهٔ بعد، مساحت دایره‌ای به قطر همان کاسه (یعنی کف کاسه) را محاسبه و با مساحت سطح نیم‌کره جمع می‌کنیم. حاصل، حداقل کاغذ مورد نیاز برای کادوپیچ کردن خواهد بود.

ب) شکل کاسه بنا بر فرض نیمکره است. سطح آن قرار است پوشانده شود. پس ما دو نیمکره خواهیم داشت: داخلی و خارجی. فرمول سطح نیمکره $2\pi r^2$ است. پس اگر این دو نیمکره جمع گردند، یک کرهٔ کامل $4\pi r^2$ می‌شود. پس به این مقدار کاغذکادو نیاز داریم.

ج) چون شکل کاسه نصف توپ فوتبال است، نمی‌توان دقیق مقدار کاغذکادوی مصرف‌شده را پیدا کرد.

د) داده‌های مسئله کافی نیست.

مسئلهٔ ۵. قرار است سه برش نان در زیر کوره برشته شود. این کوره می‌تواند هم‌زمان دو برش نان را در خود جای دهد، اما فقط یک طرف آن هم‌زمان برشته می‌شود. ۳۰ ثانیه طول می‌کشد تا یک طرف هر تکه نان برشته شود. ۵ ثانیه برای قرار دادن یک تکه یا بیرون آوردن یک تکه و ۳ ثانیه برای برگرداندن یک تکه لازم است. کوتاه‌ترین زمانی که می‌توان سه برش را برشته کرد، چقدر است [۴۴]؟

الف) $۳ \times ۳ + \left(۳ \times ۵\right) \times ۳ + \left(۳ \times ۳۰\right) \times ۲$

ب) ابتدا دو تا را کامل برشته می‌کنیم و بعد از پایان کار، تکهٔ سوم را برشته می‌کنیم.

ج) $۳ \times ۳ + \left(۳ \times ۵\right) \times ۲ + \left(۳ \times ۳۰\right) \times ۲$

د) ابتدا دو نان را قرار می‌دهیم و یک طرف آن را برشته می‌کنیم. حال یکی از نان‌ها را خارج می‌کنیم و نان سوم را قرار می‌دهیم و نان اول را برمی‌گردانیم. می‌گذاریم یک طرف هرکدام برشته شود. بعد از ۳۰ ثانیه، نان اول را که کامل پخته است، خارج می‌کنیم و طرف دیگر نان دوم را قرار می‌دهیم و نان سوم را برمی‌گردانیم. حال بعد از ۳۰ ثانیه، هر دو نان کامل پخته شده‌اند. این کار کمترین زمان را خواهد برد.

مسئلهٔ ۶. همان‌طور که می‌دانیم، مدتی پس از دیدن رعدوبرق در آسمان، صدای آن را می‌شنویم. این پدیده به‌دلیل بیشتر بودن سرعت نور نسبت به سرعت صداست. تابه‌حال به این فکر کرده‌اید که چقدر با محل وقوع رعدوبرق فاصله داریم؟ سرعت صوت ۳۴۳ متر بر ثانیه است. اگر ۶ ثانیه بعد از دیدن رعدوبرق صدای آن را بشنویم، چند کیلومتر تا محل وقوع فاصله داریم؟ آیا در حالت کلی می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم [۴۳]؟

الف) ۲/۰۵۸ کیلومتر فاصله دارید.

ب) فاصلهٔ صدای رعد و دیدن نور رعد را نمی‌توان محاسبه کرد.

ج) فاصله‌ای بین صدای رعدوبرق آن نیست.

د) ۵۷/۱ متر فاصله است.

مسئلهٔ ۷. کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند یک موضوع خوب برای پژوهش باشد [۴۴]؟

الف) بررسی درستی اثبات و فرمول ریاضی در مدل دانهٔ برف کخ؛

ب) بررسی اثبات و استدلال و آوردن مثال نقض برای نقض مدل دانهٔ برف کخ؛

ج) انجام استدلال جدیدتر و دقیق‌تر هندسی و بسط و توسعهٔ مدل دانهٔ برف کخ؛

د) ارائهٔ یک نظریهٔ ذهنی برای یک مدل دانهٔ برف.